平方根の正則連分数に関する考察（その１１）

２００８年7月１１日
北海道岩見沢農業高校
加藤秀隆

０．はじめに

自然数や有理数の平方根を近似する分数群を得る計算から卒業したつもりでしたが、

$\sqrt{D}$ を近似することになるペル方程式（弱１）に属する分子数、分母数 x, y を得る方法を紹介します。D を平方数以外の自然数とします。

$$x^2 - y^2 D = -1$$

を満たす自然数の組を見つけ、作り出していくことができます。会田等左衛門安明氏の夢を実現するものです。ただし、平方数以外のすべての自然数の平行根が、必ず弱１をもつとは限りません。

１．弱１をもつ平方根について

強１の上を走っていく正則連分数は、$\sqrt{D} = \dfrac{x}{y}$ とおいて、

$$t = \left(x \pm y\sqrt{D}\right)^n = \left(x \pm \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$$

を展開計算することにより入手することができ、

$$t = \left(x + y\sqrt{D}\right)^n = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$$

により、十分入手可能でした。この計算式を

$$s = \left(x + y\sqrt{D}\right)^n = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^n$$

とおきます。

$$\left(y\sqrt{D}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2$$

$$y^2 D = x^2 + 1$$

$$x^2 - y^2 D = -1$$

$x = 1,2,3,4,\cdots$ を代入しながら、頑張ってみます。始めは、自然数の平方根の正則連分数成分の循環節の長さが１のものが現われますが､循環節の長さが奇数になる自然数の平方根のものも出現します。

２．弱１をもつ自然数の平方根の正則連分数について

$$\left(y\sqrt{D}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2$$

$$y^2D=x^2+1$$

$$x^2-y^2D=-1$$

を満たす$\sqrt{D},x,y$ は、$\sqrt{2}$〜$\sqrt{1000}$ のすべてを拾いました。

正則連分数成分の循環節の長さが奇数の代表的なものを見てみましょう。

・長さ 1 の代表は、$\sqrt{2}$ です。

$$x=1\rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=1+\sqrt{1^2+1}=1+\sqrt{2}$$

・長さ 3 の代表は、$\sqrt{41}$ です。

$$x=32\rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=32+\sqrt{32^2+1}=32+\sqrt{1025}=32+\sqrt{5\bullet5\bullet41}$$

$$=32+5\sqrt{41}$$

・長さ 5 の代表は、$\sqrt{13}$ です。

$$x=18\rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=18+\sqrt{18^2+1}=18+\sqrt{325}=18+\sqrt{5\bullet5\bullet13}$$

$$=18+5\sqrt{13}$$

・長さ 7 の代表は、$\sqrt{58}$ です。

$$x=99\rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=99+\sqrt{99^2+1}=99+\sqrt{9802}=99+\sqrt{13\bullet13\bullet58}$$

$$=99+13\sqrt{58}$$

・長さ 9 の代表は、$\sqrt{106}$ です。

$$x=4005\rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=4005+\sqrt{4005^2+1}=4005+\sqrt{16040026}$$

$$=4005+\sqrt{389\bullet389\bullet106}=4005+389\sqrt{106}$$

・長さ 11 の代表は、$\sqrt{61}$ です。

$$x=29718\rightarrow x+\sqrt{x^2+1}=29718+\sqrt{29718^2+1}=29718+\sqrt{883159525}$$

$$=29718+\sqrt{3805\bullet3805\bullet61}=29718+3805\sqrt{61}$$

フェルマー問題の第１ステップから登場して、準主役を演じます。

・長さ 13 の代表は、$\sqrt{193}$ です。

$$x=1764132 \to x+\sqrt{x^2+1}=1764132+\sqrt{1764132^2+1}$$

$$=1764132+\sqrt{3112161713425}$$

$$=1764132+\sqrt{126985^2 \cdot 193}$$

$$=1764132+126985\sqrt{193}$$

以上の弱１をもつ平方根の様子は、正則連分数計算から入手した分子数を代入計算しています。$\sqrt{193}$ の計算では、関数電卓計算を２回行い補正しています。

３．弱１をもつ平方根のリスト

原積（ルート数の中味）の数として２から 1000 までのなかで弱１をもつものは、次の通りです。正則連分数成分の循環節の長さの順に挙げていきます。

・１→2,5,17,26,37,50,65,82,101,122,145,170,197,226,257,290,325,362,401,442,485
530,577,626,677,730,785,842,901,962

・３→41,130,269,370,458,697,986

・５→13,29,53,74,85,89,125,173,185,218,229,293,338,346,365,373,445,533,557,629
701,733,818,845,914,925,965,985

・７→58,73,202,250,274,314,349,425,538,761

・９→106,113,137,149,265,389,493,610,698,754,970

・11→61,97,233,298,317,554,757,773,794,797

・13→193,281,481,565,593,746,778,997

・15→109,353,461,617,685,709,877

・17→157,241,313,449,829857,941

・19→337,509,521,569,653,865,922,929,977

・21→181,277,394,397,409,433,641,809,953

・23→586,634,853

・25→457,881

・27→949

・29→821

・31→601,673

・33→613,937

・35→該当数なし(1061)

・37→421,769

・　39→541,661

$\sqrt{9999}$ **まで追いかけてみました。弱１をもつ平方根のすべてを**

$$x+\sqrt{x^2+1}=x+y\sqrt{D}$$

ペル方程式（弱１）の上を走っていく正則連分数を

$$s=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n \qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

$$s=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)^n \qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

により得ることができます。参考文献は、ありません。