平方根の正則連分数に関する考察（その１０）

２００８年7月3日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

０より大きな平方数でないすべての有理数の平方根を最良に近似する分数群を得る計算法を紹介します。純粋ペル方程式の上を走って（滑って）いく分数群として入手することができました。江戸時代中期の会田等左衛門安明数学と２００８年現在進行形の計算法との融合です。この紹介で「平方根の正則連分数に関する考察」レポートの最終回（完結編）とします。拝読ありがとうございました。

１．分数の平方根の正則連分数表記

１より大きな平方数でない有理数の平方根の正則連分数展開を記述します。

$$\sqrt{\frac{3}{2}} = [1;4,2,4,2,4,2,\cdots] = [1;\dot{4},\dot{2}]$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = [1;1,1,2,1,1,2,1,1,2,\cdots] = [1;\dot{1},1,\dot{2}]$$

$$\sqrt{\frac{7}{2}} = [1;1,6,1,2,1,6,1,2,1,6,1,2,\cdots] = [1;\dot{1},6,1,\dot{2}]$$

•••

$$\sqrt{\frac{4}{3}} = [1;6,2,6,2,6,2,\cdots] = [1;\dot{6},\dot{2}]$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = [1;3,2,3,2,3,2,\cdots] = [1;\dot{3},\dot{2}]$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = [1;1,1,8,1,1,2,1,1,8,1,1,2,1,1,8,1,1,2,\cdots] = [1;\dot{1},1,8,1,1,\dot{2}]$$

•••

２．正則連分数

$\sqrt{\frac{3}{2}}$ **の純粋ペル方程式の上を走っていく正則連分数を作ります。**

$\frac{1}{2}\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ **なので、$\sqrt{6}$ の純粋ペル方程式を構成する分子数、分母数を作り、加工します。**

$x+y\sqrt{D}=(x+\sqrt{x^2-1})^n$ において、$x=5$ を代入して、

$$x+y\sqrt{D}=(5+\sqrt{5^2-1})^n=(5+2\sqrt{6})^n$$

$n=0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ として、展開の様子を見てみましょう。

$$\sqrt{6}=\frac{1}{0},\frac{5}{2},\frac{49}{20},\frac{485}{198},\bullet\bullet\bullet$$

$$x^2-y^2\bullet 6=1^2-0^2\bullet 6=1-0=1$$

$$x^2-y^2\bullet 6=5^2-2^2\bullet 6=25-24=1$$

$$x^2-y^2\bullet 6=49^2-20^2\bullet 6=2401-2400=1$$

$$x^2-y^2\bullet 6=485^2-198^2\bullet 6=235225-235224=1$$

純粋ペル方程式を満たしています。$\sqrt{\frac{3}{2}}$ を近似することになる純粋ペル方程式の上を走る（滑る）正則連分数は、

$$x+y\sqrt{D}=(5+2\sqrt{6})^n=\left(5+\frac{4}{2}\sqrt{6}\right)^n$$

$$=\left(5+4\sqrt{\frac{6}{4}}\right)^n=\left(5+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^n$$

により入手することができます。$n=0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ を代入すると、

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{0},\frac{5}{4},\frac{49}{40},\frac{485}{396},\bullet\bullet\bullet$$

を得ます。調べてみましょう。

$$x^2-y^2\bullet\frac{3}{2}=1^2-0^2\bullet\frac{3}{2}=1-0=1$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{3}{2}=5^2-4^2\bullet\frac{3}{2}=25-24=1$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{3}{2}=49^2-40^2\bullet\frac{3}{2}=2401-2400=1$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{3}{2}=485^2-396^2\bullet\frac{3}{2}=235225-235224=1$$

$\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ なので、$\sqrt{10}$ の純粋ペル方程式を構成する分子数、分母数を作ります。

$$x+y\sqrt{D}=(x+\sqrt{x^2-1})^n$$

$x=19$ を代入して、

$$x+y\sqrt{D}=(19+\sqrt{19^2-1})^n=(19+\sqrt{360})^n=\left(19+6\sqrt{10}\right)^n$$

$\sqrt{\dfrac{5}{2}}$ を近似することになる純粋ペル方程式の上を走る（滑る）正則連分数は、

$$x+y\sqrt{D}=(19+6\sqrt{10})^n=(19+\frac{12}{2}\sqrt{10})^n$$

$$=\left(19+12\sqrt{\frac{10}{4}}\right)^n=\left(19+12\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^n$$

$n=0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ として、

$$\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{0},\frac{19}{12},\frac{721}{456},\frac{27379}{17316},\bullet\bullet\bullet$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{5}{2}=1^2-0^2\bullet\frac{5}{2}=1-0=1$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{5}{2}=19^2-12^2\bullet\frac{5}{2}=361-360=1$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{5}{2}=721^2-456^2\bullet\frac{5}{2}=519841-519840=1$$

$$x^2-y^2\bullet\frac{5}{2}=27379^2-17316^2\bullet\frac{5}{2}=749609641-749609640=1$$

$\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\sqrt{\dfrac{14}{4}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ なので、 $\sqrt{14}$ の純粋ペル方程式を構成する分子数、分母数を作り変形します。

$$x+y\sqrt{D}=(x+\sqrt{x^2-1})^n$$

$x=15$ を代入して、

$$x+y\sqrt{D}=(15+\sqrt{15^2-1})^n=(15+\sqrt{224})^n=\left(15+4\sqrt{14}\right)^n$$

$$=\left(15+4\sqrt{14}\right)^n=\left(15+\frac{8}{2}\sqrt{14}\right)^n=\left(15+8\sqrt{\frac{14}{4}}\right)^n=\left(15+8\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^n$$

$n=0,1,2,3,\cdots$ として、

$$\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{1}{0},\frac{15}{8},\frac{449}{240},\frac{13455}{7192},\cdots$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{7}{2}=1^2-0^2\cdot\frac{7}{2}=1-0=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{7}{2}=15^2-8^2\cdot\frac{7}{2}=225-224=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{7}{2}=449^2-240^2\cdot\frac{7}{2}=201601-201600=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{7}{2}=13455^2-7192^2\cdot\frac{7}{2}=181037025-181037024=1$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}}=[1;6,2,6,2,6,2,\cdots]=[1;\dot{6},\dot{2}]$$

$$\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{\sqrt{12}}{3}$$

$$x+y\sqrt{D}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n=\left(7+\sqrt{7^2-1}\right)^n=\left(7+\sqrt{48}\right)^n=\left(7+2\sqrt{12}\right)^n$$

$$=\left(7+\frac{6}{3}\sqrt{12}\right)^n=\left(7+6\sqrt{\frac{12}{9}}\right)^n=\left(7+6\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^n$$

$n=0,1,2,3,\cdots$ として、

$$\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{1}{0},\frac{7}{6},\frac{97}{84},\frac{1351}{1170},\cdots$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{4}{3}=1^2-0^2\cdot\frac{4}{3}=1-0=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{4}{3}=7^2-6^2\cdot\frac{4}{3}=49-48=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{4}{3}=97^2-84^2\cdot\frac{4}{3}=9409-9408=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{4}{3}=1351^2-1170^2\cdot\frac{4}{3}=1825201-1825200=1$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = [1;3,2,3,2,3,2,\bullet\bullet\bullet] = [1;\dot{3},\dot{2}]$$

$$x + y\sqrt{D} = (4+\sqrt{4^2-1})^n = (4+\sqrt{15})^n = \left(4+\frac{3}{3}\sqrt{15}\right)^n$$

$$= \left(4+3\sqrt{\frac{15}{9}}\right)^n = \left(4+3\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^n$$

$n = 0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ として、

$$\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{1}{0},\frac{4}{3},\frac{31}{24},\frac{244}{189},\bullet\bullet\bullet$$

$$x^2 - y^2\bullet\frac{5}{3} = 1^2 - 0^2\bullet\frac{5}{3} = 1-0 = 1$$

$$x^2 - y^2\bullet\frac{5}{3} = 4^2 - 3^2\bullet\frac{5}{3} = 16-15 = 1$$

$$x^2 - y^2\bullet\frac{5}{3} = 31^2 - 24^2\bullet\frac{5}{3} = 961-960 = 1$$

$$x^2 - y^2\bullet\frac{5}{3} = 244^2 - 189^2\bullet\frac{5}{3} = 59536-59535 = 1$$

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = [1;1,1,8,1,1,2,1,1,8,1,1,2,1,1,8,1,1,2,\bullet\bullet\bullet] = [1;\dot{1},1,8,1,1,\dot{2}]$$

$$x + y\sqrt{D} = (55+\sqrt{55^2-1})^n = (55+\sqrt{3024})^n = \left(55+12\sqrt{21}\right)^n$$

$$= \left(55+\frac{36}{3}\sqrt{21}\right)^n = \left(55+36\sqrt{\frac{21}{9}}\right)^n = \left(55+36\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^n$$

$n = 0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ として、

$$\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{1}{0},\frac{55}{36},\frac{6049}{3960},\frac{665335}{435564},\bullet\bullet\bullet$$

$$x^2 - y^2\bullet\frac{7}{3} = 1^2 - 0^2\bullet\frac{7}{3} = 1-0 = 1$$

$$x^2 - y^2\bullet\frac{7}{3} = 55^2 - 36^2\bullet\frac{7}{3} = 3025-3024 = 1$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{7}{3} = 6049^2 - 3960^2 \cdot \frac{7}{3} = 36590401 - 36590400 = 1$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{7}{3} = 665335^2 - 435564^2 \cdot \frac{7}{3} = 44267066225 - 44267066224 = 1$$

３．０と１の間の有理数の平方根を近似する分数群を得る計算

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = [0;1,2,2,2,\cdots] = [0;1,\dot{2}]$$

$$= \left(\frac{1}{0}\right), \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}, \frac{29}{41}, \cdots$$

順にペル方程式の右辺定数を作ってみます。

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 1^2 - 0^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 0^2 - 1^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 1^2 - 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 2^2 - 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 4 - \frac{9}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 5^2 - 7^2 \cdot \frac{1}{2} = 25 - \frac{49}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 12^2 - 17^2 \cdot \frac{1}{2} = 144 - \frac{289}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 29^2 - 41^2 \cdot \frac{1}{2} = 841 - \frac{1681}{2} = \frac{1}{2}$$

正則連分数展開には、ペル方程式の弱１、強１が現われていませんが、会田等左衛門安明氏の最上流にならって作ることができます。

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \to \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 1^2 - 2^2 \cdot \frac{1}{2} = 1 - 2 = -1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{0}{1}, \frac{2}{3} \to \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}}{0 \cdot 3 + 1 \cdot 2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 3^2 - 4^2 \bullet \frac{1}{2} = 9 - 8 = 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \to \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1 \bullet 1 + 1 \bullet 1 \bullet \frac{1}{2}}{1 \bullet 1 + 1 \bullet 1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \to \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2 \bullet 2 + 3 \bullet 3 \bullet \frac{1}{2}}{2 \bullet 3 + 3 \bullet 2} = \frac{4 + \frac{9}{2}}{12} = \frac{17}{24}$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 17^2 - 24^2 \bullet \frac{1}{2} = 289 - 288 = 1$$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ を近似する分数群を、弱１の $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ を利用した　$x + y\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$ を展開計算することにより得ることができます。また、強１のみに属する最良の近似分数群は、$x + y\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(3 + 4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$ により得ることができます。

ところで、次の等式変形により純粋ペル方程式（強１）に属する最良な近似分数を得ることができます。

$$x + y\sqrt{D} = (3 + \sqrt{3^2 - 1})^n = (3 + \sqrt{8})^n = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

$$= \left(3 + \frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^n = \left(3 + 4\sqrt{\frac{2}{4}}\right)^n = \left(3 + 4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$$

$n = 0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ **として、**

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0}, \frac{3}{4}, \frac{17}{24}, \frac{99}{140}, \bullet\bullet\bullet$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 1^2 - 0^2 \bullet \frac{1}{2} = 1 - 0 = 1$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 3^2 - 4^2 \bullet \frac{1}{2} = 9 - 8 = 1$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 17^2 - 24^2 \bullet \frac{1}{2} = 289 - 288 = 1$$

$$x^2 - y^2 \cdot \frac{1}{2} = 99^2 - 140^2 \cdot \frac{1}{2} = 9801 - 9800 = 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = [0;1,1,2,1,2,1,2,\cdots] = [0;1,\dot{1},\dot{2}]$$
$$\sqrt{\frac{2}{3}} = [0;1,4,2,4,2,4,2,\cdots] = [0;1,\dot{4},\dot{2}]$$

$\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ **なので、$\sqrt{3},\sqrt{6}$ の純粋ペル方程式の上を走る正則連分数の一般項計算から入手します。**

$$x + y\sqrt{D} = (2+\sqrt{2^2-1})^n = (2+\sqrt{3})^n = (2+\frac{3}{3}\sqrt{3})^n = \left(2+3\sqrt{\frac{3}{9}}\right)^n$$

$$= \left(2+3\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^n$$

$$x + y\sqrt{D} = (5+\sqrt{5^2-1})^n = (5+\sqrt{24})^n = (5+2\sqrt{6})^n = \left(5+\frac{6}{3}\sqrt{6}\right)^n$$

$$= \left(5+6\sqrt{\frac{6}{9}}\right)^n = \left(5+6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{0}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \frac{26}{45}, \cdots$$
$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{0}, \frac{5}{6}, \frac{49}{60}, \frac{485}{594}, \cdots$$

０より大きな有理数（有限小数となる分数、循環小数となる分数）の純粋ペル方程式（強１）に属する最良な近似分数群を作り出すことができました。同様のことをほかの有理数の平方根について適用してください。成功を祈念します。

参考文献

会田等左衛門安明：「最上流　算法平方零約術」（山形大学附属図書館所蔵）

Wikipedia,the free encyclopedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/chebyshev_polinomials

Mathworld:

http://mathworld.wolfram.com/pell equation.htlm

Jeroen Demeyer(2007):Diophantine Sets over Polynomial Rings and Hilbert's Tenth Problem for function Fields　の 77ﾍﾟｰｼﾞから 80ﾍﾟｰｼﾞ

http://cage.ugent.be/~jdemeyer/phd.pdf