平方根の正則連分数に関する考察（その１）

２００８年1月２３日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

平方根の正則連分数を得る一般的な数式変形と異なる変形を紹介します。登場する正則連分数成分（要素）の簡易的な入手方法も記述します。

１．平方根を近似する正則連分数を得る数式変形

$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+x-1$ と置く。$x=\sqrt{2}=1.41421356\cdots$を使用しました。

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{x-1}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{-2x+3}{x-1}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{-2x+3}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{5x-7}{-2x+3}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{-2x+3}{5x-7}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{-12x+17}{5x-7}}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{5x-7}{-12x+17}}}}}=\cdots$$

のように数式変形していきます。各正則連分数成分を入手したときの分数式は正の小数を表すので、$x-1>0,\quad \dfrac{-2x+3}{x-1}>0,\quad \dfrac{5x-7}{-2x+3}>0,\quad \dfrac{-12x+17}{5x-7}>0,\quad \cdots$

これらを解くと順次、正則連分数が得られます。

$$1<\frac{7}{5}<\cdots<x<\cdots<\frac{17}{12}<\frac{3}{2}$$

１次式　$x-1>0,\quad -2x+3>0,\quad 5x-7>0,\quad -12x+17>0,\quad \cdots$と正則連分数成分の入手方法を考えます。

・第１項について、$\dfrac{1}{x-1}=n+\dfrac{-n(x-1)+1}{x-1}$ とおくとき分数式部分の分子において、

$n=1,2,3,\cdots$を代入します。$x=\sqrt{2}$ です。

分子$=-x+2>0$　分子$=-2x+3>0$　分子$=-3x+4<0$　分子$=-4x+5<0$

分子を正の値にする最後の $n=2$ を第１項の成分にします。分子式$=-2x+3$

・第２項について、$\dfrac{x-1}{-2x+3}=n+\dfrac{-n(-2x+3)+x-1}{-2x+3}$ とおいて、ここでも分数式部分の分子を正の値にする最後のnを探します。

分子$=3x-4>0$　分子$=5x-7>0$　分子$=7x-10<0$　分子$=9x-13<0$

第２項の成分は、$n=2$　分子式$=5x-7$

・第３項について、$\dfrac{-2x+3}{5x-7}=n+\dfrac{-n(5x-7)-2x+3}{5x-7}$ とおいて、分数式部分の分子を正の値にする最後のnを探します。

分子$=-7x+10>0$　分子$=-12x+17>0$　分子$=-17x+24<0$

分子$=-22x+31<0$

第３項の成分は、$n=2$　分子式$=-12x+17$

連分数成分と分数式部分は、連動し同時に入手できることを示しています。

２．数式部分の考察

正則連分数成分を行列に取り込み、分数式部分と比較してみます。

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}7&3\\5&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}2&-3\\-5&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\5&-7\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}17&7\\12&5\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-7\\-12&17\end{pmatrix}$$

分数式の係数や定数項は、正則連分数を行列に取り込んだ行列や行列の積の列ベクトルと密接な関係にあることがわかります。

３．連分数成分の入手方法

１次式　$x-1>0,\quad -2x+3>0,\quad 5x-7>0,\quad -12x+17>0,\quad \cdots$

を $1-x<0,\quad 3-2x>0,\quad 7-5x<0,\quad 17-12x>0,\quad \cdots$ とします。

負→正→負→正→負→正→・・・の流れで、これらの１次式を入手するとよく、

$a>0, b>0$ **のとき、** $a-b>0 \Leftrightarrow a^2-b^2>0$

$a-b<0 \Leftrightarrow a^2-b^2<0$

により１次式を、

$1^2-x^2<0, \quad 3^2-2^2x^2>0, \quad 7^2-5^2x^2<0, \quad 17^2-12^2x^2>0, \quad \cdots$

すなわち、

$1^2-2 \cdot 1^2<0, \quad 3^2-2 \cdot 2^2>0, \quad 7^2-2 \cdot 5^2<0, \quad 17^2-2 \cdot 12^2>0, \quad \cdots$

のもとに入手できる。ペル方程式の左辺計算に正負の判定を委ねることができます。

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad {x_0}^2 - 2{y_0}^2 = 1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$$

この負の値をスタートにして、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix}$$

$${x_1}^2 - 2{y_1}^2 = (n+1)^2 - 2n^2 = -n^2 + 2n + 1 \qquad n = 1,2,3,4,\cdots$$

正の値にする最後の n **を第１項の正則連分数成分とします。**

$${x_1}^2 - 2{y_1}^2 = 2,1,-2,-7, \quad \cdots$$

なので、第１項の正則連分数成分 $=2$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3n+1 \\ 2n+1 \end{pmatrix}$$

$${x_2}^2 - 2{y_2}^2 = (3n+1)^2 - 2(2n+1)^2 = n^2 - 2n - 1$$

今度は負の値にする最後の n **を第２項の正則連分数成分とします。**

$${x_2}^2 - 2{y_2}^2 = -2,-1,2,7, \quad \cdots$$

なので、第２項の正則連分数成分 $=2$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7n+3 \\ 5n+2 \end{pmatrix}$$

$${x_3}^2 - 2{y_3}^2 = (7n+3)^2 - 2(5n+2)^2 = -n^2 + 2n + 1$$

正の値にする最後の n **は、** $n=2$ **。これ以降の正則連分数成分は、２になります。**

４．３乗根の正則連分数について

$\sqrt[3]{2}$ を得る数式変形を記述します。

$\sqrt[3]{2}=1+\sqrt[3]{2}-1=1+x-1$ **とおくと、（**$x=\sqrt[3]{2}=1.25992104989\cdots$**です。）**

$$=1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{x-1}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{-3x+4}{x-1}}$$ **と変形できます。**

続けてみましょう。

$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{-3x+4}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{4x-5}{-3x+4}}}$$

逆数化と分数関数部分の調整を繰り返します。

$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{-3x+4}{4x-5}}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{-23x+29}{4x-5}}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\cfrac{4x-5}{-23x+29}}}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{27x-34}{-23x+29}}}}}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{-23x+29}{27x-34}}}}}}=\cdots$$

平方根と同様に、負→正→負→正→負→正→･･･の流れで１次式を入手することができます。

$x-1>0,\quad -3x+4>0,\quad 4x-5>0,\quad -23x+29>0,\quad 27x-34<0\quad\cdots$

を $1-x<0,\quad 4-3x>0,\quad 5-4x<0,\quad 29-23x>0,\quad 34-27x<0,\quad\cdots$ **の流れで入手できるとよく、**$x=\sqrt[3]{2}$ **なので、**

$a>0,b>0$ **のとき、**$a-b\sqrt[3]{2}>0\Leftrightarrow a^3-2b^3>0$

$$a-b\sqrt[3]{2}<0\Leftrightarrow a^3-2b^3<0$$

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad x_0{}^3-2y_0{}^3=1^3-2\cdot1^3=-1$$

この負の値をスタートにして、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix}$$

$$x^3 - 2y^3 = (n+1)^3 - 2n^3 = -n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \qquad n = 1,2,3,4,\cdots$$

として、正の値にする最後の n **を第１項の正則連分数成分にします。**

$$x_1{}^3 - 2y_1{}^3 = 6,11,10,-3,-34, \quad \cdots$$

なので、第１項の正則連分数成分$=3$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4n+1 \\ 3n+1 \end{pmatrix}$$

$$x_2{}^3 - 2y_2{}^3 = (4n+1)^3 - 2(3n+1)^3 = 10n^3 - 6n^2 - 6n - 1$$

負の値にする最後の n **を第２項の正則連分数成分としていきます。**

$$x_2{}^3 - 2y_2{}^3 = -3,43,197,519, \quad \cdots$$

なので、第２項の正則連分数成分$=1$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5n+4 \\ 4n+3 \end{pmatrix}$$

$$x_3{}^3 - 2y_3{}^3 = (5n+4)^3 - 2(4n+3)^3 = -3n^3 + 12n^2 + 24n + 10$$

として、正の値にする最後の n **を第２項の正則連分数成分とします。**

$$x^3 - 2y^3 = 43,82,109,106,55,-62,-263, \quad \cdots$$

なので、第３項の正則連分数成分$=5$

第３０項まで記します。十進 BASIC **によるものです。**

$$\sqrt[3]{2} = [1; \quad 3,1,5,1,1,4,1,1,8,1, \quad 14,1,10,2,1,4,12,2,3,2, \quad 1,3,4,1,1,2,14,3,12,1, \quad \cdots]$$