ペル方程式の拡張

２００８年8月２５日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

Dを平方数以外の自然数として、$x^2-y^2D=\pm 1$を満たす自然数の最小解を求める問題を通称ペル方程式と呼んでいます。Dを平方数以外の有理数にしても、自然数のときと同様にペル方程式（強１）を満たす最小の自然数解を求めることができ、一般解も求めることができます。弱１をもつ有理数もあります。x, yは、$\sqrt{D}$を最良に近似する正則連分数の分子数、分母数になります。

１．Dが１より大きな有理数の場合

自然数の場合と全く同じ正則連分数計算ができます。有理化した数値から正則連分数を求め方向が最善です。関数電卓により追跡することもできます。具体例により示します。

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{2}[2;2,4,2,4,2,4,\cdots]=\frac{1}{2}[2;\dot{2},\dot{4}]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{22}{9},\frac{49}{20},\frac{218}{89},\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{1},\frac{5}{4},\frac{11}{9},\frac{49}{40},\frac{109}{89},\cdots$$

また、電卓計算、自然数の平方根の正則連分数計算に従うと、

$$\sqrt{\frac{3}{2}}=[1;4,2,4,2,4,2,\cdots]=[1;\dot{4},\dot{2}]$$

$$=\frac{1}{1},\frac{5}{4},\frac{11}{9},\frac{49}{40},\frac{109}{89},\cdots$$

ここで $x^2-y^2D=x^2-y^2\cdot\frac{3}{2}$により、右辺定数を計算すると、

$$-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2},\cdots$$

$x^2-y^2\cdot\frac{3}{2}=1$を満たす最小の自然数解は $x=5, y=4$であり、一般解X, Yは、

$$X+Y\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(5+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^n \qquad n=0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$$

になります。この右辺の累乗計算式を$\sqrt{6}$に成り立つペル方程式（強１）を作り出す数式から得ることができます。$x^2-y^2\bullet 6=1$を満たす最小の自然数解は、

$$x=5\rightarrow x+\sqrt{x^2-1}=5+\sqrt{5^2-1}=5+\sqrt{24}=5+2\sqrt{6}$$

から、$x=5, y=2$です。$x^2-y^2\bullet 6=1$を満たす自然数の一般解は、

$$X+Y\sqrt{6}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n \qquad n=0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$$

です。この数式を次のように変形しします。

$$X+Y\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n=\left(5+\frac{4}{2}\sqrt{6}\right)^n=\left(5+4\sqrt{\frac{6}{4}}\right)^n=\left(5+4\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^n$$

前述の累乗計算式です。

もう１つ例示します。

$$\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}=\frac{1}{3}[3;1,6,1,6,1,6,\bullet\bullet\bullet]=\frac{1}{3}[3;\dot{1},\dot{6}]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{27}{7},\frac{31}{8},\frac{213}{55},\frac{244}{63},\frac{1677}{433},\bullet\bullet\bullet\right)$$

$$=\frac{1}{1},\frac{4}{3},\frac{9}{7},\frac{31}{24},\frac{71}{55},\frac{244}{189},\frac{559}{433},\bullet\bullet\bullet$$

$x^2-y^2D=x^2-y^2\bullet\frac{5}{3}$により、ペル方程式右辺定数を計算すると順に、

$$-\frac{2}{3},1,-\frac{2}{3},1,-\frac{2}{3},1,-\frac{2}{3},\bullet\bullet\bullet$$

です。従って、ペル方程式 $x^2-y^2\bullet\frac{5}{3}=1$ を満たす自然数の一般解は、

$$X+Y\sqrt{\frac{5}{3}}=\left(4+3\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^n$$

により得ることができます。ところで、$\sqrt{\frac{5}{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$なので、$\sqrt{15}$に成り立つペル方程式（強１）から$\sqrt{\frac{5}{3}}$のペル方程式（強１）の一般解を得ることができます。

$$X+Y\sqrt{15}=\left(4+\sqrt{15}\right)^n$$

$$X+Y\sqrt{\frac{5}{3}}=\left(4+\sqrt{15}\right)^n=\left(4+\frac{3}{3}\sqrt{15}\right)^n=\left(4+3\sqrt{\frac{15}{9}}\right)^n=\left(4+3\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^n$$

です。

2．Dが０と１の間の有理数（分数）の場合

有理化した数値から正則連分数を求める方向が最善です。関数電卓により追跡することもできますが正則になりません。具体例により示します。

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}[1;2,2,2,\bullet\bullet\bullet]=\frac{1}{2}[1;\dot{2}]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\frac{99}{70},\bullet\bullet\bullet\right)$$

$$=\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{10},\frac{17}{24},\frac{41}{58},\frac{99}{140},\bullet\bullet\bullet$$

$x^2-y^2\bullet\frac{1}{2}$**によりペル方程式右辺定数を計算すると順に、**

$$-1,1,-1,1,-1,1,\bullet\bullet\bullet$$

弱１に属する初期値の正則連分数からのペル方程式の一般項は、

$$X+Y\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(1+2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$$

強１に属する初期値の正則連分数からのペル方程式の一般項は、

$$X+Y\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(3+4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$$

です。

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$**から**$\sqrt{2}$**の正則連分数の逆数を並べてみます。**

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{12}{17},\frac{29}{41},\frac{70}{99},\bullet\bullet\bullet$$

$x^2-y^2\bullet\frac{1}{2}$**によりペル方程式右辺定数を計算すると順に、**

$$\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\bullet\bullet\bullet$$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ の数値自体に、電卓計算や自然数の平方根の正則連分数計算を適用してみます。

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=[0;1,2,2,2,\cdots]=[0;1,\dot{2}]$$

$$=\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{12}{17},\frac{29}{41},\frac{70}{99},\cdots$$

$\sqrt{2}$ の正則連分数の逆数の流れと重なります。前述のように $x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}$ によるペル方程式右辺定数には整数値が現れませんが、前述のペル方程式右辺定数値をとる正則連分数を作ることができます。

$$\frac{1}{1},\frac{1}{1}\to\frac{1\cdot1+1\cdot1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot1+1\cdot1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1},\frac{2}{3}\to\frac{1\cdot2+1\cdot3\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot3+1\cdot2}=\frac{2+\frac{3}{2}}{5}=\frac{4+3}{10}=\frac{7}{10}$$

$\sqrt{2}$ について成り立つペル方程式（強１）の一般解を得る数式から、$\sqrt{\frac{1}{2}}$ についてのペル方的式（強１）の一般解を作る数式を作ることができます。

$$X+Y\sqrt{2}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$$

$$X+Y\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=\left(3+\frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^n=\left(3+4\sqrt{\frac{2}{4}}\right)^n=\left(3+4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$$

ここでも、もう１つ例示します。$\sqrt{\frac{2}{3}}$ について、

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{3}[2;\dot{2},\dot{4}]$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{22}{9},\frac{49}{20},\frac{218}{89},\cdots\right)$$

$$=\frac{2}{3},\frac{5}{6},\frac{22}{27},\frac{49}{60},\frac{218}{267},\cdots$$

$x^2-y^2\cdot\frac{2}{3}$ によりペル方程式右辺定数を計算すると順に、

$$-2,1,-2,1,-2,\cdots$$

ペル方程式（強１）を満たす自然数の一般解は、

$$X+Y\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(5+6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$$

により求めることができます。展開計算してみてください。

$\sqrt{\frac{2}{3}}$ **は、** $\sqrt{\frac{3}{2}}$ **の逆数なので** $\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{1}{1},\frac{5}{4},\frac{11}{9},\frac{49}{40},\frac{109}{89},\cdots$ **を反転させて、**

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{1},\frac{4}{5},\frac{9}{11},\frac{40}{49},\frac{89}{109},\cdots$$

$x^2-y^2\cdot\frac{2}{3}$ **によりペル方程式右辺定数を計算すると順に、**

$$\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\cdots$$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$ **についての正則連分数計算を自然数の平方根と同様に電卓、プログラム計算すると、**

$$\sqrt{\frac{2}{3}}=[0;1,4,2,4,2,4,2,\cdots]=[0;1,\dot{4},\dot{2}]$$

$$=\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{4}{5},\frac{9}{11},\frac{40}{49},\frac{89}{109},\cdots$$

これらの近似分数群からペル方程式右辺定数が整数値をとる前述の普通の意味での正則連分数を得ることができます。

$$\frac{1}{1},\frac{1}{1}\rightarrow\frac{1\cdot1+1\cdot1\cdot\frac{2}{3}}{1\cdot1+1\cdot1}=\frac{1+\frac{2}{3}}{2}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{1},\frac{4}{5}\rightarrow\frac{1\cdot4+1\cdot5\cdot\frac{2}{3}}{1\cdot5+1\cdot4}=\frac{4+\frac{10}{3}}{9}=\frac{12+10}{27}=\frac{22}{27}$$

$\sqrt{\frac{2}{3}}$ **に関するペル方程式（強１）を満たす自然数の一般解を** $\sqrt{6}$ **のものから得ることができます。** $x^2-y^2\cdot6=1$ **を満たす自然数の一般解は、**

$$X+Y\sqrt{6}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n\qquad n=0,1,2,3,\cdots$$

でした。この数式を次のように変形しましま す。

$$X+Y\sqrt{\frac{2}{3}}=\left(5+2\sqrt{6}\right)^n=\left(5+\frac{6}{3}\sqrt{6}\right)^n=\left(5+6\sqrt{\frac{6}{9}}\right)^n=\left(5+6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^n$$

前述した数式に一致します。

参考文献

会田等左衛門安明：「最上流　算法平方零約術」（山形大学附属図書館所蔵）

Wikipedia,the free encyclopedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/chebyshev_polinomials

Mathworld:

http://mathworld.wolfram.com/pell equation.htlm

Jeroen Demeyer(2007):Diophantine Sets over Polynomial Rings and Hilbert's Tenth Problem for function Fields　**の** 77**ﾍﾟｰｼﾞから** 80**ﾍﾟｰｼﾞ**

http://cage.ugent.be/~jdemeyer/phd.pdf