ペル方程式の拡張（覚書）

２００８年7月１７日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

０．はじめに

昨年から$\sqrt{2}$ を中心に平方根を近似する分数群の構成や正則連分数による最良な近似分数群を作り上げてきましたが、0 より大きな平方数でない平方根のペル方程式を有理数に拡張することができました。有理数でも江戸時代の会田等左衛門安明氏が夢見た平方根の弱１や強１に属する近似分数群を得ることができます。

１．自然数の平方根について

$\sqrt{9999}$ までの弱１、強１を十進 BASIC により追いかけました。会田等左衛門安明氏の「最上流平方零約術」に記述されている「逐求弱一強一之術」を$\sqrt{97}$ に適用してみます。正則連分数成分の循環節の長さは、11 です。長さが奇数なので、弱１、強１の正則連分数が存在します。正則連分数展開してみます。

$$\sqrt{97}=\frac{1}{0},\frac{9}{1},\frac{10}{1},\frac{59}{6},\frac{69}{7},\frac{128}{13},\frac{197}{20},\frac{325}{33},\frac{522}{53},\frac{847}{86},\frac{4757}{483},\frac{5604}{569},\bullet\bullet\bullet$$

ペル方程式右辺定数は、順に$1,-16,3,-11,8,-9,9,-8,11,-3,16,-1,\bullet\bullet\bullet$

隣接している弱９、強９の正則連分数 $\frac{x_5}{y_5}=\frac{128}{13},\frac{x_6}{y_6}=\frac{197}{20}$ により、ペル方程式右辺定数の計算は、$(-9)(9)=(-81)$ です。

$$\frac{x_{5+6}}{y_{5+6}}=\frac{x_5x_6+y_5y_6D}{x_5y_6+y_5x_6}=\frac{128\bullet197+13\bullet20\bullet97}{128\bullet20+13\bullet197}=\frac{50436}{5121}$$ になることから、

$$x^2-y^2\bullet97=50436^2-5121^2\bullet97=-81$$

81 で割って、

$$\left(\frac{50436}{9}\right)^2-\left(\frac{5121}{9}\right)^2\bullet97=-1$$

$$5604^2-569^2\bullet97=-1$$

弱１の$\frac{5604}{569}$ を作ったことになります。この弱１により強１の近似分数は、

$$\frac{x}{y}=\frac{5604\bullet5604+569\bullet569\bullet97}{5604\bullet569+569\bullet5604}=\frac{62809633}{6377352}$$

になります。$(-1)(-1)=(1)$

従って、$\sqrt{97}=\dfrac{X}{Y}$ とおくと、弱１と強１に属する最良な近似分数群を、

$$X+Y\sqrt{97}=\left(5604+569\sqrt{97}\right)^{n},\left(62809633+6377352\sqrt{97}\right)^{n}$$

の展開計算により入手できます。累乗部分を指数乗 $n=2^{m},3^{m},4^{m},\cdots$ にすると、より高速に近似していく正則連分数を得ることもできます。桁数が関数電卓の表示の限界に近いので桁数を区切って計算していくか計算ソフトを使用します。

　小数展開してみます。

$$\sqrt{97}=9.848857801796104721744\cdots$$

$$\frac{5604}{569}=9.8488576\cdots$$

$$\frac{62809633}{6377352}=9.8488578017961059\cdots$$

　循環節の長さが奇数でも偶数でも、１ループの中で強１を見つけ出すことができます。このことを会田等左衛門安明氏が発見しています。久留島義太氏かもしれません。

正則連分数成分の循環節の長さの代表で弱１や強１の様子を見ていきます。

・長さが 1 の代表は、$\sqrt{2}$ です。

$$\sqrt{2}=\frac{1}{0},\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{5},\frac{17}{12},\frac{41}{29},\cdots$$

$$1,-1,1,-1,1,-1,\cdots$$

正則連分数計算の入り口を長年築き上げてきた平方根です。

$\sqrt{D}\quad\dfrac{X}{Y}$ とおくと、

$$X^{2}-Y^{2}\cdot D=1$$

を満たす強１に属する正則連分数のすべてを、

$$X\pm Y\sqrt{D}=\left(x\pm\sqrt{x^{2}-1}\right)^{n}$$

により得ることができます。$\sqrt{2}$ では、

$$X\pm Y\sqrt{2}=\left(3\pm\sqrt{3^{2}-1}\right)^{n}=\left(3\pm\sqrt{8}\right)^{n}=\left(3\pm2\sqrt{2}\right)^{n}$$

ペル方程式 $x^{2}-2y^{2}=1$ を満たす最小の自然数の組は、$(x,y)=(3,2)$ であり、強１に属する正則連分数は、

$$\frac{X}{Y}=\frac{1}{0},\frac{3}{2},\frac{17}{12},\frac{99}{70},\frac{577}{408},\frac{3363}{2378},\cdots$$

になります。

$\sqrt{D}$ が弱１に属する正則連分数をもつとき、

$$X^2 - Y^2 \cdot D = -1$$

を満たす弱１に属する正則連分数のすべてを、

$$X \pm Y\sqrt{D} = \left(x \pm \sqrt{x^2+1}\right)^n$$

により得ることができます。$\sqrt{2}$ では、

$$X \pm Y\sqrt{2} = \left(1 \pm \sqrt{1^2+1}\right)^n = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)^n \quad n \text{ は奇数}$$

ペル方程式 $x^2 - 2y^2 = -1$ を満たす最小の自然数の組は、$(x, y) = (1,1)$ であり、弱１に属する正則連分数は、

$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \frac{1393}{985}, \cdots$$

になります。

・長さが２の代表は、$\sqrt{3}$ です。

$$\sqrt{3} = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \cdots$$

$$1, -2, 1, -2, 1, -2, 1, \cdots$$

強１を作ってみます。

$$\frac{x}{y} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{4}{2} \quad (-2)(-2) = (4)$$

$$4^2 - 2^2 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$2^2 = 4$ で割って、

$$\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 \cdot 3 = 1$$

$$2^2 - 1^2 \cdot 3 = 1$$

$\frac{2}{1}$ は、強１に属する正則連分数です。弱１に属する近似分数は、存在しません。

$$(-1)(-1) = (1)$$

$\sqrt{3}$ の弱１に属する分数の初期値を $\frac{x}{y}$ とおきます。x, y は、勿論自然数とします。

$$x^2 - y^2 \cdot 3 = -1$$

$$\left(x + y\sqrt{3}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$$

$$x^2 + 3y^2 = 2 \quad 2xy = 1$$

この連理方程式を解くと、

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

となり、 x, y が自然数であることに反します。

・長さが３の代表は、$\sqrt{41}$ です。

$$\sqrt{41} = \frac{1}{0}, \frac{6}{1}, \frac{13}{2}, \frac{32}{5}, \frac{397}{62}, \frac{826}{129}, \frac{2049}{320}, \cdots$$

$$1, -5, 5, -1, 5, -5, 1, \cdots$$

弱５と強５の正則連分数により、弱１に属する正則連分数を作ることができます。

$$\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot 13 + 1 \cdot 2 \cdot 41}{6 \cdot 2 + 1 \cdot 13} = \frac{160}{25} = \frac{32}{5}$$

強１に属する正則連分数を弱５同士、強５同士、弱１の３方向から同一のものを作ることができます。

$$\frac{x}{y} = \frac{6 \cdot 826 + 1 \cdot 129 \cdot 41}{6 \cdot 129 + 1 \cdot 826} = \frac{10245}{1600} = \frac{2049}{320}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{13 \cdot 397 + 2 \cdot 62 \cdot 41}{13 \cdot 62 + 2 \cdot 397} = \frac{10245}{1600} = \frac{2049}{320}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{32^2 + 5^2 \cdot 41}{2 \cdot 32 \cdot 5} = \frac{2049}{320}$$

このように、強１に属する正則連分数を正則連分数成分の循環節を１ループさせることなく探し当てることができます。

・長さが４の代表は、$\sqrt{7}$ です。弱１に属する正則連分数はありませんが、強１に属する正則連分数を作ることができます。

$$\sqrt{7} = \frac{1}{0}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \cdots$$

$$1, -3, 2, -3, 1, \cdots$$

弱３の２つの分数や強２の１つの分数を利用します。

$$\frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 7}{2 \cdot 2 + 1 \cdot 5} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3^2 + 1^2 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

・循環節の長さが５の $\sqrt{13}$ の様子を見ます。

$$\sqrt{13}=\frac{1}{0},\frac{3}{1},\frac{4}{1},\frac{7}{2},\frac{11}{3},\frac{18}{5},\cdots,\frac{649}{180},\cdots$$

$$1,-4,3,-3,4,-1,\cdots,1,\cdots$$

弱１を作ることができます。

$$\sqrt{13}=\frac{4}{1},\frac{7}{2}$$

$$\sqrt{13}=\frac{4\cdot 7+1\cdot 2\cdot 13}{4\cdot 2+1\cdot 7}=\frac{54}{15} \qquad (3)(-3)=(-9)$$

$$\left(\frac{54}{3}\right)^2-\left(\frac{15}{3}\right)^2\cdot 13=-1$$

$$18^2-5^2\cdot 13=-1$$

$\frac{18}{5}$ が弱１に属する正則連分数になり、強１の正則連分数を前述と同じように作ります。

$$\sqrt{13}=\frac{18^2+5^2\cdot 13}{2\cdot 18\cdot 5}=\frac{649}{180} \qquad (-1)(-1)=(1)$$

これらにより作られていく正則連分数の様子を確認します。

$$x+y\sqrt{13}=\left(18+5\sqrt{13}\right)^m \quad m \text{ は奇数}$$

$$\sqrt{13}=\frac{18}{5},\frac{23382}{6485},\frac{30349818}{8417525},\cdots$$

$$x+y\sqrt{13}=\left(649+180\sqrt{13}\right)^n$$

$$\sqrt{13}=\frac{1}{0},\frac{649}{180},\frac{842401}{233640},\frac{1093435849}{303264540},\frac{1419278889601}{393637139280},$$

$$=\frac{1842222905266249}{510940703520900},\frac{2391203911756701601}{663200639532988920},\cdots$$

弱１は、強１を得るためのワンクッションです。強１が最強です。誤差を評価してみます。

$$\varepsilon_n=\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{D} \qquad \varepsilon_{2n}=\frac{y_n}{2x_n}\cdot\ \varepsilon_n{}^2$$

$$\varepsilon_1=\frac{649}{180}-\sqrt{13}=0.0000042800915\cdots$$

$$\varepsilon_2 = \frac{180}{2\cdot 649}\cdot \varepsilon_1{}^2 = \frac{90}{649}\cdot \varepsilon_1{}^2 = 0.0000000000025404106\cdots$$

$$\varepsilon_4 = \frac{233640}{2\cdot 842401}\cdot \varepsilon_2{}^2 = \frac{116820}{842401}\cdot \varepsilon_2{}^2$$

$$= 0.00000000000000000000000089496529\cdots$$

・循環節の長さが６の $\sqrt{19}$ **の様子を見ます。**

$$\sqrt{19} = \frac{1}{0},\frac{4}{1},\frac{9}{2},\frac{13}{3},\frac{48}{11},\frac{61}{14},\frac{170}{39},\cdots$$

$$1,-3,5,-2,5,-3,1,\cdots$$

この様相から強１が存在します。弱１は存在しません。強１を作ってみます。

$$\frac{4}{1},\frac{61}{14} \to \frac{4\cdot 61+1\cdot 14\cdot 19}{4\cdot 14+1\cdot 61} = \frac{510}{117} = \frac{170}{39}$$

$$\frac{9}{2},\frac{48}{11} \to \frac{9\cdot 48+2\cdot 11\cdot 19}{9\cdot 11+2\cdot 48} = \frac{510}{117} = \frac{170}{39}$$

$$\frac{13}{3},\frac{13}{3} \to \frac{13^2+3^2\cdot 19}{2\cdot 13\cdot 3} = \frac{340}{78} = \frac{170}{39}$$

$$170^2 - 39^2\cdot 19 = 28900 - 28899 = 1$$

$$x + y\sqrt{19} = \left(170 + \sqrt{170^2 - 1}\right)^n = \left(170 \pm \sqrt{28899}\right)^n$$

$$= \left(170 + 39\sqrt{19}\right)^n$$

・循環節の長さが７の $\sqrt{58}$ **の様子を見ます。**

弱１を作り、強１を作りましょう。

$$\sqrt{58} = \frac{1}{0},\frac{7}{1},\frac{8}{1},\frac{15}{2},\frac{23}{3},\frac{38}{5},\frac{61}{8},\frac{99}{13},\cdots,\frac{19603}{2574},\cdots$$

$$1,-9,6,-7,7,-6,9,-1,\cdots$$

$$\frac{15}{2},\frac{23}{3} \to \frac{15\cdot 23+2\cdot 3\cdot 58}{15\cdot 3+2\cdot 23} = \frac{693}{91} = \frac{99}{13}$$

$$\frac{99}{13},\frac{99}{13} \to \frac{99^2+13^2\cdot 58}{2\cdot 99\cdot 13} = \frac{19603}{2574}$$

現代では、弱１は、

$$x + y\sqrt{58} = \left(99 + \sqrt{99^2 + 1}\right)^n = \left(99 + \sqrt{9802}\right)^n$$

$$=\left(99+13\sqrt{58}\right)^n$$

$$\sqrt{58}=\frac{99}{13}$$

これにより、強１の正則連分数は、

$$x+y\sqrt{58}=\left(99+13\sqrt{58}\right)^2=19603+2574\sqrt{58}$$

$$\sqrt{58}=\frac{19603}{2574}$$

のように得ることができます。

２．弱１のリスト

D	x	y	D	x	y	D	x	y
2	1	1	37	6	1	73	1068	125
5	2	1	41	32	5	74	43	5
10	3	1	50	7	1	82	9	1
13	18	5	53	182	25	85	378	41
17	4	1	58	99	13	89	500	53
26	5	1	61	29718	3805	97	5604	569
29	70	13	65	8	1	101	10	1

３．ペル方程式の有理数への拡張

平方根のペル方程式（強１）の自然数の一般解を得る数式から有理数の平方根のペル方程式（強１）を満たす自然数の一般解を得ることができます。現在行われている入手方法のアレンジを試みます。無限循環小数になる分母数７の平方根のペル方程式（強１）を満たす最小の自然数解を得る計算方法があります。勿論、すべての有理数（有限小数展開になる分数、その他の無限循環小数展開になる分数）に応用できます。$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}$ から、次のような変形を試みました。

$$\sqrt{2}=\left(3+\sqrt{3^2-1}\right)^n=\left(3+\sqrt{8}\right)^n=\left(3+2\sqrt{2}\right)^n$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\left(3+\frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^n=\left(3+4\sqrt{\frac{2}{4}}\right)^n=\left(3+4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$$

クリーンヒットでした。会田等左衛門安明氏の構想が、現代数学に匹敵するアイデアをもっていたことを立証するものです。追いかけてみましょう。正則連分数展開は、

$$\sqrt{\frac{1}{2}}=[0;1,2,2,2,\cdots]=[0;1,\dot{2}]$$

$$=\left(\frac{1}{0}\right),\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{12}{17},\frac{29}{41},\cdots$$

順にペル方程式の右辺定数を作ってみます。

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=1^2-0^2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=0^2-1^2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=1^2-1^2\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=2^2-3^2\cdot\frac{1}{2}=4-\frac{9}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=5^2-7^2\cdot\frac{1}{2}=25-\frac{49}{2}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=12^2-17^2\cdot\frac{1}{2}=144-\frac{289}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=29^2-41^2\cdot\frac{1}{2}=841-\frac{1681}{2}=\frac{1}{2}$$

正則連分数展開には、ペル方程式の弱１、強１が現われていませんが、会田等左衛門安明氏の最上流にならって作ることができます。

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\quad \frac{0}{1},\frac{1}{1}\to\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{0\cdot1+1\cdot1\cdot\frac{1}{2}}{0\cdot1+1\cdot1}=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=1^2-2^2\cdot\frac{1}{2}=1-2=-1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\quad \frac{0}{1},\frac{2}{3}\to\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{0\cdot2+1\cdot3\cdot\frac{1}{2}}{0\cdot3+1\cdot2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

$$x^2-y^2\cdot\frac{1}{2}=3^2-4^2\cdot\frac{1}{2}=9-8=1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\quad \frac{1}{1},\frac{1}{1}\to\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1\cdot1+1\cdot1\cdot\frac{1}{2}}{1\cdot1+1\cdot1}=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{2}{3},\frac{2}{3} \to \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2 \bullet 2 + 3 \bullet 3 \bullet \frac{1}{2}}{2 \bullet 3 + 3 \bullet 2} = \frac{4 + \frac{9}{2}}{12} = \frac{17}{24}$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 17^2 - 24^2 \bullet \frac{1}{2} = 289 - 288 = 1$$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ **を近似する分数群を、弱１の** $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ **を利用した** $x + y\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(1 + 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$

を展開計算することにより得ることができます。また、強１のみに属する最良の近似分数群（正則連分数ではありません）は、 $x + y\sqrt{\frac{1}{2}} = \left(3 + 4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$ **により得ることができます。この数式を次の等式変形から得ることができます。**

$$x + y\sqrt{D} = (3 + \sqrt{3^2 - 1})^n = (3 + \sqrt{8})^n = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

$$= \left(3 + \frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^n = \left(3 + 4\sqrt{\frac{2}{4}}\right)^n = \left(3 + 4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^n$$

$n = 0,1,2,3,\bullet\bullet\bullet$ **として、**

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0},\frac{3}{4},\frac{17}{24},\frac{99}{140},\bullet\bullet\bullet$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 1^2 - 0^2 \bullet \frac{1}{2} = 1 - 0 = 1$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 3^2 - 4^2 \bullet \frac{1}{2} = 9 - 8 = 1$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 17^2 - 24^2 \bullet \frac{1}{2} = 289 - 288 = 1$$

$$x^2 - y^2 \bullet \frac{1}{2} = 99^2 - 140^2 \bullet \frac{1}{2} = 9801 - 9800 = 1$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{0},\frac{3}{4},\frac{17}{24},\frac{99}{140},\frac{577}{816},\frac{3363}{4756},\frac{19601}{27720},\frac{114243}{161564},\bullet\bullet\bullet$$

を得ます。平方数以外の自然数の平方根の最良な近似分数群をペル方程式（強１）から作ってきましたが、０より大きな平方数以外の有理数の平方根の最良な近似分数群は、自然数と同形式のペル方程式を成立させます。ペル方程式の拡張です。数式の展開を指数乗に

して展開すると平方根を高速で近似する分数群や小数展開を得ることができます。循環小数になる分数の平方根の様子を見てみましょう。

・$\sqrt{\dfrac{1}{7}}$ を近似する分数群（正則連分数ではありません。）について

ペル方程式を意識した数式変形を行います。

$$X+Y\sqrt{\frac{1}{7}}=\left(8+3\sqrt{7}\right)^n=\left(8+\frac{21}{7}\sqrt{7}\right)^n=\left(8+21\sqrt{\frac{7}{49}}\right)^n=\left(8+21\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^n$$

ペル方程式計算をします。

$$8^2-21^2\bullet\frac{1}{7}=64-441\bullet\frac{1}{7}=64-63=1$$

このことにより、展開式により得られる分子数、分母数は、ペル方程式（強１）の上を走っていきます。

$$\sqrt{\frac{1}{7}}=\frac{1}{0},\frac{8}{21},\frac{127}{336},\frac{2024}{5355},\frac{32257}{85344},\frac{514088}{1360149},\cdots$$

・$\sqrt{\dfrac{6}{7}}$ を近似する分数群（正則連分数ではありません。）について

$$X+Y\sqrt{\frac{6}{7}}=\left(13+2\sqrt{42}\right)^n=\left(13+\frac{14}{7}\sqrt{42}\right)^n=\left(13+14\sqrt{\frac{42}{49}}\right)^n=\left(13+14\sqrt{\frac{6}{7}}\right)^n$$

ペル方程式計算をします。

$$13^2-14^2\bullet\frac{6}{7}=169-196\bullet\frac{6}{7}=169-168=1$$

$$\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{1}{0},\frac{13}{14},\frac{337}{364},\frac{8749}{9450},\frac{227137}{245336},\frac{5896813}{6369286},\cdots$$

・$\sqrt{\dfrac{8}{7}}$ を近似する分数群（正則連分数です。）について

$$X+Y\sqrt{\frac{8}{7}}=\left(15+2\sqrt{56}\right)^n=\left(15+\frac{14}{7}\sqrt{56}\right)^n=\left(15+14\sqrt{\frac{56}{49}}\right)^n=\left(15+14\sqrt{\frac{8}{7}}\right)^n$$

ペル方程式計算をします。

$$15^2-14^2\bullet\frac{8}{7}=225-196\bullet\frac{8}{7}=225-224=1$$

$$\sqrt{\frac{8}{7}}=\frac{1}{0},\frac{15}{14},\frac{449}{420},\frac{13455}{12586},\frac{403201}{377160},\frac{12082575}{11302214},\cdots$$

・$\sqrt{\dfrac{13}{7}}$ を近似する分数群（正則連分数です。）について

$$X+Y\sqrt{\frac{13}{7}}=\left(1574+165\sqrt{91}\right)^n=\left(1574+\frac{1155}{7}\sqrt{91}\right)^n=\left(1574+1155\sqrt{\frac{91}{49}}\right)^n$$

$$=\left(1574+1155\sqrt{\frac{13}{7}}\right)^n$$

ペル方程式計算をします。

$$1574^2-1155^2\bullet\frac{13}{7}=2477476-1334025\bullet\frac{13}{7}=2477476-2477475=1$$

$$\sqrt{\frac{13}{7}}=\frac{1}{0},\frac{1574}{1155},\frac{4954951}{3635940},\frac{15598184174}{11445937965},\cdots$$

３．弱１をもつ分数の平方根

作りましょう。まず、$\sqrt{2}$ は弱１をもっています。このことを利用します。

$$X+Y\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^n=\left(1+\frac{k}{k}\sqrt{2}\right)^n=\left(1+k\sqrt{\frac{2}{k^2}}\right)^n$$

$$1^2-k^2\bullet\frac{2}{k^2}=1-2=-1$$

$\sqrt{\dfrac{2}{k^2}}$　　$k\geq 1$ の自然数

$\sqrt{2}\rightarrow\sqrt{\dfrac{1}{2}},\sqrt{\dfrac{2}{9}},\sqrt{\dfrac{1}{8}},\sqrt{\dfrac{2}{25}},\sqrt{\dfrac{1}{18}},\sqrt{\dfrac{2}{49}},\sqrt{\dfrac{1}{32}},\sqrt{\dfrac{2}{81}},\sqrt{\dfrac{1}{50}},\cdots$ が弱１に属する近似分数群をもつ。

・$\sqrt{5}$ では、どうでしょうか。

$$X+Y\sqrt{5}=\left(2+\sqrt{5}\right)^n=\left(2+\frac{k}{k}\sqrt{5}\right)^n=\left(2+k\sqrt{\frac{5}{k^2}}\right)^n$$

$$2^2-k^2\bullet\frac{5}{k^2}=4-5=-1$$

$\sqrt{5}\rightarrow\sqrt{\dfrac{5}{4}},\sqrt{\dfrac{5}{9}},\sqrt{\dfrac{5}{16}},\sqrt{\dfrac{1}{5}},\sqrt{\dfrac{5}{36}},\sqrt{\dfrac{5}{49}},\sqrt{\dfrac{5}{64}},\sqrt{\dfrac{5}{81}},\sqrt{\dfrac{1}{20}},\cdots$ が弱１に属する近似分数群をもつことになります。

・$\sqrt{10}$ では、どうでしょうか。

$$X+Y\sqrt{10}=\left(3+\sqrt{10}\right)^n=\left(3+\frac{k}{k}\sqrt{10}\right)^n=\left(3+k\sqrt{\frac{10}{k^2}}\right)^n$$

$$3^2-k^2\bullet\frac{10}{k^2}=9-10=-1$$

$$\sqrt{10}\to\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{10}{9}},\sqrt{\frac{5}{8}},\sqrt{\frac{2}{5}},\sqrt{\frac{5}{18}},\sqrt{\frac{10}{49}},\sqrt{\frac{5}{32}},\sqrt{\frac{10}{81}},\sqrt{\frac{1}{10}},\cdots$$

・ 弱１をもつ $\sqrt{D}$ について、

$$X+Y\sqrt{D}=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n=\left(x+y\sqrt{D}\right)^n$$

$$x^2-y^2D=-1$$

のとき、$X+Y\sqrt{D}=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^n=\left(x+y\sqrt{D}\right)^n=\left(x+ky\sqrt{\frac{D}{k^2}}\right)^n$ は、

$$x^2-(ky)^2\bullet\frac{D}{k^2}=x^2-y^2D=-1$$

$\sqrt{D}\to\sqrt{\frac{D}{4}},\sqrt{\frac{D}{9}},\sqrt{\frac{D}{16}},\sqrt{\frac{D}{25}},\sqrt{\frac{D}{36}},\sqrt{\frac{D}{49}},\sqrt{\frac{D}{64}},\sqrt{\frac{D}{81}},\sqrt{\frac{D}{100}},\cdots$ が弱１に属する近似分数群をもちます。

・$\sqrt{13}$ では、$X+Y\sqrt{13}=\left(18+5\sqrt{13}\right)^n=\left(18+\frac{5k}{k}\sqrt{13}\right)^n=\left(18+5k\sqrt{\frac{13}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{13}\to\sqrt{\frac{13}{4}},\sqrt{\frac{13}{9}},\sqrt{\frac{13}{16}},\sqrt{\frac{13}{25}},\sqrt{\frac{13}{36}},\sqrt{\frac{13}{49}},\sqrt{\frac{13}{64}},\sqrt{\frac{13}{81}},\sqrt{\frac{13}{100}},\cdots$ が弱１に属する近似分数群をもつ。

・$\sqrt{17}$ では、$X+Y\sqrt{17}=\left(4+\sqrt{17}\right)^n=\left(4+\frac{k}{k}\sqrt{17}\right)^n=\left(4+k\sqrt{\frac{17}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{17}\to\sqrt{\frac{17}{4}},\sqrt{\frac{17}{9}},\sqrt{\frac{17}{16}},\sqrt{\frac{17}{25}},\sqrt{\frac{17}{36}},\sqrt{\frac{17}{49}},\sqrt{\frac{17}{64}},\sqrt{\frac{17}{81}},\sqrt{\frac{17}{100}},\cdots$ が弱１に属する近似分数群をもつ。

・$\sqrt{26}$ では、$X+Y\sqrt{26}=\left(5+\sqrt{26}\right)^n=\left(5+\dfrac{k}{k}\sqrt{26}\right)^n=\left(5+k\sqrt{\dfrac{26}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{26}\rightarrow\sqrt{\dfrac{13}{2}},\sqrt{\dfrac{26}{9}},\sqrt{\dfrac{13}{8}},\sqrt{\dfrac{26}{25}},\sqrt{\dfrac{13}{18}},\sqrt{\dfrac{26}{49}},\sqrt{\dfrac{13}{32}},\sqrt{\dfrac{26}{81}},\sqrt{\dfrac{13}{50}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{29}$ では、$X+Y\sqrt{29}=\left(70+13\sqrt{29}\right)^n=\left(70+\dfrac{13k}{k}\sqrt{29}\right)^n=\left(70+13k\sqrt{\dfrac{29}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{29}\rightarrow\sqrt{\dfrac{29}{4}},\sqrt{\dfrac{29}{9}},\sqrt{\dfrac{29}{16}},\sqrt{\dfrac{29}{25}},\sqrt{\dfrac{29}{36}},\sqrt{\dfrac{29}{49}},\sqrt{\dfrac{29}{64}},\sqrt{\dfrac{29}{81}},\sqrt{\dfrac{29}{100}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{37}$ では、$X+Y\sqrt{37}=\left(6+\sqrt{37}\right)^n=\left(6+\dfrac{k}{k}\sqrt{37}\right)^n=\left(6+k\sqrt{\dfrac{37}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{37}\rightarrow\sqrt{\dfrac{37}{4}},\sqrt{\dfrac{37}{9}},\sqrt{\dfrac{37}{16}},\sqrt{\dfrac{37}{25}},\sqrt{\dfrac{37}{36}},\sqrt{\dfrac{37}{49}},\sqrt{\dfrac{37}{64}},\sqrt{\dfrac{37}{81}},\sqrt{\dfrac{37}{100}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{50}$ では、$X+Y\sqrt{50}=\left(7+\sqrt{50}\right)^n=\left(7+\dfrac{k}{k}\sqrt{50}\right)^n=\left(7+k\sqrt{\dfrac{50}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{50}\rightarrow\sqrt{\dfrac{25}{2}},\sqrt{\dfrac{50}{9}},\sqrt{\dfrac{25}{8}},\sqrt{\dfrac{2}{1}},\sqrt{\dfrac{25}{18}},\sqrt{\dfrac{50}{49}},\sqrt{\dfrac{25}{32}},\sqrt{\dfrac{50}{81}},\sqrt{\dfrac{1}{2}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{53}$ では、$X+Y\sqrt{53}=\left(182+25\sqrt{53}\right)^n=\left(182+\dfrac{25k}{k}\sqrt{53}\right)^n=\left(182+25k\sqrt{\dfrac{53}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{53}\rightarrow\sqrt{\dfrac{53}{4}},\sqrt{\dfrac{53}{9}},\sqrt{\dfrac{53}{16}},\sqrt{\dfrac{53}{25}},\sqrt{\dfrac{53}{36}},\sqrt{\dfrac{53}{49}},\sqrt{\dfrac{53}{64}},\sqrt{\dfrac{53}{81}},\sqrt{\dfrac{53}{100}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{58}$ では、$X+Y\sqrt{58}=\left(99+13\sqrt{58}\right)^n=\left(99+\dfrac{13k}{k}\sqrt{58}\right)^n=\left(99+13k\sqrt{\dfrac{58}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{58}\rightarrow\sqrt{\dfrac{29}{2}},\sqrt{\dfrac{58}{9}},\sqrt{\dfrac{29}{8}},\sqrt{\dfrac{58}{25}},\sqrt{\dfrac{29}{18}},\sqrt{\dfrac{58}{49}},\sqrt{\dfrac{29}{32}},\sqrt{\dfrac{58}{81}},\sqrt{\dfrac{29}{50}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{61}$ では、$X+Y\sqrt{61}=\left(29718+3805\sqrt{61}\right)^n=\left(29718+\dfrac{3805k}{k}\sqrt{61}\right)^n$

$$=\left(29718+3805k\sqrt{\frac{61}{k^2}}\right)^n$$

$\sqrt{61}\to\sqrt{\dfrac{61}{4}},\sqrt{\dfrac{61}{9}},\sqrt{\dfrac{61}{16}},\sqrt{\dfrac{61}{25}},\sqrt{\dfrac{61}{36}},\sqrt{\dfrac{61}{49}},\sqrt{\dfrac{61}{64}},\sqrt{\dfrac{61}{81}},\sqrt{\dfrac{61}{100}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{65}$ では、$X+Y\sqrt{65}=\left(8+\sqrt{65}\right)^n=\left(8+\dfrac{k}{k}\sqrt{65}\right)^n=\left(8+k\sqrt{\dfrac{65}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{65}\to\sqrt{\dfrac{65}{4}},\sqrt{\dfrac{65}{9}},\sqrt{\dfrac{65}{16}},\sqrt{\dfrac{13}{5}},\sqrt{\dfrac{65}{36}},\sqrt{\dfrac{65}{49}},\sqrt{\dfrac{65}{64}},\sqrt{\dfrac{65}{81}},\sqrt{\dfrac{13}{20}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{73}$ では、$X+Y\sqrt{73}=\left(1068+125\sqrt{73}\right)^n=\left(1068+\dfrac{125k}{k}\sqrt{73}\right)^n$

$$=\left(1068+125k\sqrt{\frac{73}{k^2}}\right)^n$$

$\sqrt{73}\to\sqrt{\dfrac{73}{4}},\sqrt{\dfrac{73}{9}},\sqrt{\dfrac{73}{16}},\sqrt{\dfrac{73}{25}},\sqrt{\dfrac{73}{36}},\sqrt{\dfrac{73}{49}},\sqrt{\dfrac{73}{64}},\sqrt{\dfrac{73}{81}},\sqrt{\dfrac{73}{100}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{74}$ では、$X+Y\sqrt{74}=\left(43+5\sqrt{74}\right)^n=\left(43+\dfrac{5k}{k}\sqrt{74}\right)^n=\left(43+5k\sqrt{\dfrac{74}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{74}\to\sqrt{\dfrac{37}{2}},\sqrt{\dfrac{74}{9}},\sqrt{\dfrac{37}{8}},\sqrt{\dfrac{74}{25}},\sqrt{\dfrac{37}{18}},\sqrt{\dfrac{74}{49}},\sqrt{\dfrac{37}{32}},\sqrt{\dfrac{74}{81}},\sqrt{\dfrac{37}{50}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{82}$ では、$X+Y\sqrt{82}=\left(9+\sqrt{82}\right)^n=\left(9+\dfrac{k}{k}\sqrt{82}\right)^n=\left(9+k\sqrt{\dfrac{82}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{82}\to\sqrt{\dfrac{41}{2}},\sqrt{\dfrac{82}{9}},\sqrt{\dfrac{41}{8}},\sqrt{\dfrac{82}{25}},\sqrt{\dfrac{41}{18}},\sqrt{\dfrac{82}{49}},\sqrt{\dfrac{41}{32}},\sqrt{\dfrac{84}{81}},\sqrt{\dfrac{41}{50}},\cdots$ **が弱 1 に属する近似分**

数群をもつ。

・$\sqrt{85}$ では、$X+Y\sqrt{85}=\left(378+41\sqrt{85}\right)^n=\left(378+\frac{41k}{k}\sqrt{85}\right)^n$

$$=\left(378+41k\sqrt{\frac{85}{k^2}}\right)^n$$

$\sqrt{85}\rightarrow\sqrt{\frac{85}{4}},\sqrt{\frac{85}{9}},\sqrt{\frac{85}{16}},\sqrt{\frac{17}{5}},\sqrt{\frac{85}{36}},\sqrt{\frac{85}{49}},\sqrt{\frac{85}{64}},\sqrt{\frac{85}{81}},\sqrt{\frac{17}{20}},\cdots$ が弱 1 に属する近似分数群をもつ。

・$\sqrt{89}$ では、$X+Y\sqrt{89}=\left(500+53\sqrt{89}\right)^n=\left(500+\frac{53k}{k}\sqrt{89}\right)^n$

$$=\left(500+53k\sqrt{\frac{89}{k^2}}\right)^n$$

$\sqrt{89}\rightarrow\sqrt{\frac{89}{4}},\sqrt{\frac{89}{9}},\sqrt{\frac{89}{16}},\sqrt{\frac{89}{25}},\sqrt{\frac{89}{36}},\sqrt{\frac{89}{49}},\sqrt{\frac{89}{64}},\sqrt{\frac{89}{81}},\sqrt{\frac{89}{100}},\cdots$ が弱 1 に属する近似分数群をもつ。

・$\sqrt{97}$ では、$X+Y\sqrt{97}=\left(5604+569\sqrt{97}\right)^n=\left(5604+\frac{569k}{k}\sqrt{97}\right)^n$

$$=\left(5604+569k\sqrt{\frac{97}{k^2}}\right)^n$$

・$\sqrt{101}$ では、$X+Y\sqrt{101}=\left(10+\sqrt{101}\right)^n=\left(10+\frac{k}{k}\sqrt{101}\right)^n=\left(10+k\sqrt{\frac{101}{k^2}}\right)^n$

$\sqrt{101}\rightarrow\sqrt{\frac{101}{4}},\sqrt{\frac{101}{9}},\sqrt{\frac{101}{16}},\sqrt{\frac{101}{25}},\sqrt{\frac{101}{36}},\sqrt{\frac{101}{49}},\sqrt{\frac{101}{64}},\sqrt{\frac{101}{81}},\sqrt{\frac{101}{100}},\cdots$ が弱 1 に属する近似分数群をもつ。

・$\sqrt{106}$ では、$X+Y\sqrt{106}=\left(4005+389\sqrt{106}\right)^n=\left(4005+\frac{389k}{k}\sqrt{106}\right)^n$

$$=\left(4005+389k\sqrt{\frac{106}{k^2}}\right)^n$$

$\sqrt{106}\rightarrow\sqrt{\frac{53}{2}},\sqrt{\frac{106}{9}},\sqrt{\frac{53}{8}},\sqrt{\frac{106}{25}},\sqrt{\frac{53}{18}},\sqrt{\frac{106}{49}},\sqrt{\frac{53}{32}},\sqrt{\frac{106}{81}},\sqrt{\frac{53}{50}},\cdots$ **が弱１に属する近似分数群をもつ。**

・$\sqrt{109}$ では、$X+Y\sqrt{109}=\left(8890182+851525\sqrt{109}\right)^n=\left(8890182+\frac{851525k}{k}\sqrt{109}\right)^n$

$$=\left(8890182+851525k\sqrt{\frac{109}{k^2}}\right)^n$$

$\sqrt{109}\rightarrow\sqrt{\frac{109}{4}},\sqrt{\frac{109}{9}},\sqrt{\frac{109}{16}},\sqrt{\frac{109}{25}},\sqrt{\frac{109}{36}},\sqrt{\frac{109}{49}},\sqrt{\frac{109}{64}},\sqrt{\frac{109}{81}},\sqrt{\frac{109}{100}},\cdots$ **が弱１に属する近似分数群をもつ。**

４．強１について

平方数以外のすべての平方根が強１をもちます。平方根の正則連分数に関する考察（その７）を補足していきます。

・$\sqrt{0.1}=\sqrt{\frac{1}{10}}=\sqrt{\frac{10}{100}}$ **により、**

$$X+Y\sqrt{0.1}=\left(19+6\sqrt{10}\right)^n=\left(19+\frac{60}{10}\sqrt{10}\right)^n=\left(19+60\sqrt{\frac{10}{100}}\right)^n$$

$$=\left(19+60\sqrt{0.1}\right)^n$$

ペル方程式を確認します。

$$X^2-Y^2\cdot 0.1=19^2-60^2\cdot 0.1=361-3600\cdot 0.1=361-360=1$$

$$\sqrt{0.1}=\frac{1}{0},\frac{19}{60},\frac{721}{2280},\frac{27379}{86580},\frac{1039681}{3287760},\frac{39480499}{124848300},\cdots$$

$$\sqrt{0.1}=0.31622776601683793\cdots$$

$$\frac{1039681}{3287760}=0.3162277660169842\cdots$$

$$\frac{39480499}{124848300}=0.31622776601683803\cdots$$

０より大きな有理数の平方根を最良に近似しています。

・ $\sqrt{0.2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{5}{25}}$

$$X+Y\sqrt{0.2}=\left(9+4\sqrt{5}\right)^n=\left(9+\frac{20}{5}\sqrt{5}\right)^n=\left(9+20\sqrt{\frac{5}{25}}\right)^n=\left(9+20\sqrt{0.2}\right)^n$$

$$\sqrt{0.2}=\frac{1}{0},\frac{9}{20},\frac{161}{360},\frac{2889}{6460},\frac{51841}{115920},\frac{930249}{416020},\cdots$$

・ $\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{30}{100}}$

$$X+Y\sqrt{0.3}=\left(11+2\sqrt{30}\right)^n=\left(11+\frac{20}{10}\sqrt{30}\right)^n=\left(11+20\sqrt{\frac{30}{100}}\right)^n=\left(11+20\sqrt{0.3}\right)^n$$

$$\sqrt{0.3}=\frac{1}{0},\frac{11}{20},\frac{241}{440},\frac{5291}{9660},\frac{116161}{212080},\frac{2550251}{4656100},\cdots$$

・ $\sqrt{0.4}=\sqrt{\frac{4}{10}}=\sqrt{\frac{2}{5}}=\sqrt{\frac{10}{25}}$

$$X+Y\sqrt{0.1}=\left(19+6\sqrt{10}\right)^n=\left(19+\frac{30}{5}\sqrt{10}\right)^n=\left(19+30\sqrt{\frac{10}{25}}\right)^n$$

$$=\left(19+30\sqrt{0.4}\right)^n$$

$$\sqrt{0.4}=\frac{1}{0},\frac{19}{30},\frac{721}{1140},\frac{27379}{43290},\frac{1039681}{1643880},\frac{39480499}{62424150},\cdots$$

・ $\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}$

$$X+Y\sqrt{0.5}=\left(3+2\sqrt{2}\right)^n=\left(3+\frac{4}{2}\sqrt{2}\right)^n=\left(3+4\sqrt{\frac{2}{4}}\right)^n=\left(3+4\sqrt{0.5}\right)^n$$

$$\sqrt{0.5}=\frac{1}{0},\frac{3}{4},\frac{17}{24},\frac{99}{140},\frac{577}{816},\frac{3363}{4756},\frac{19601}{27720},\frac{114243}{161564},\cdots$$

・$\sqrt{0.6}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{15}{25}}$

$$X+Y\sqrt{0.6}=\left(4+\sqrt{15}\right)^n=\left(4+\frac{5}{5}\sqrt{15}\right)^n=\left(4+5\sqrt{\frac{15}{25}}\right)^n=\left(4+5\sqrt{0.6}\right)^n$$

$$\sqrt{0.6}=\frac{1}{0},\frac{4}{5},\frac{31}{40},\frac{244}{315},\frac{1921}{2480},\frac{15124}{19525},\frac{119071}{153720},\frac{937444}{1210235},\cdots$$

・$\sqrt{0.7}=\sqrt{\frac{7}{10}}=\sqrt{\frac{70}{100}}$

$$X+Y\sqrt{0.7}=\left(251+30\sqrt{70}\right)^n=\left(251+\frac{300}{10}\sqrt{70}\right)^n=\left(251+300\sqrt{\frac{70}{100}}\right)^n$$

$$=\left(251+300\sqrt{0.7}\right)^n$$

$$\sqrt{0.7}=\frac{1}{0},\frac{251}{300},\frac{126001}{150600},\frac{63252251}{75600900},\cdots$$

・$\sqrt{0.8}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{20}{25}}$

$$X+Y\sqrt{0.8}=\left(9+2\sqrt{20}\right)^n=\left(9+\frac{10}{5}\sqrt{20}\right)^n=\left(9+10\sqrt{\frac{20}{25}}\right)^n=\left(9+10\sqrt{0.8}\right)^n$$

$$\sqrt{0.8}=\frac{1}{0},\frac{9}{10},\frac{161}{180},\frac{2889}{3230},\frac{51841}{57960},\frac{930249}{1040050},\cdots$$

・$\sqrt{0.9}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\sqrt{\frac{90}{100}}$

$$X+Y\sqrt{0.9}=\left(19+2\sqrt{90}\right)^n=\left(19+\frac{20}{10}\sqrt{90}\right)^n=\left(19+20\sqrt{\frac{90}{100}}\right)^n=\left(19+20\sqrt{0.9}\right)^n$$

$$\sqrt{0.9}=\frac{1}{0},\frac{19}{20},\frac{721}{760},\frac{27379}{28860},\frac{1039681}{1095920},\cdots$$

・$\sqrt{1.1}=\sqrt{\frac{11}{10}}=\sqrt{\frac{110}{100}}$

100 より大きな自然数の平方根のペル方程式（強１）も手本にします。

$$X+Y\sqrt{1.1}=\left(21+2\sqrt{110}\right)^n=\left(21+\frac{20}{10}\sqrt{110}\right)^n=\left(21+20\sqrt{\frac{110}{100}}\right)^n=\left(21+20\sqrt{1.1}\right)^n$$

$$\sqrt{1.1}=\frac{1}{0},\frac{21}{20},\frac{881}{840},\frac{36981}{35260},\frac{1552321}{1480080},\cdots$$

・$\sqrt{1.2}=\sqrt{\frac{6}{5}}=\sqrt{\frac{30}{25}}$

$$X+Y\sqrt{1.2}=\left(11+2\sqrt{30}\right)^n=\left(11+\frac{10}{5}\sqrt{30}\right)^n=\left(11+10\sqrt{\frac{30}{25}}\right)^n=\left(11+10\sqrt{1.2}\right)^n$$

$$\sqrt{1.2}=\frac{1}{0},\frac{11}{10},\frac{241}{220},\frac{5291}{4830},\frac{116161}{106040},\cdots$$

ペル方程式の様子を見てみます。

$$x^2-y^2\cdot 30=11^2-2^2\cdot 30=121-4\cdot 30=121-120=1$$

$$X^2-Y^2\cdot 1.2=11^2-10^2\cdot 1.2=121-100\cdot 1.2=121-120=1$$

$\left(11+10\sqrt{1.2}\right)^n$ **を展開したとき、ペル方程式（強１）の上を走っていきます。**

・$\sqrt{0.02}=\sqrt{\frac{1}{50}}=\sqrt{\frac{50}{2500}}$ **と** $\sqrt{1.01}=\sqrt{\frac{101}{100}}$ **の様子を見ましょう。**

$$X+Y\sqrt{0.02}=\left(99+14\sqrt{50}\right)^n=\left(99+\frac{700}{50}\sqrt{50}\right)^n=\left(99+700\sqrt{\frac{50}{2500}}\right)^n$$

$$=\left(99+700\sqrt{0.02}\right)^n$$

$$99^2-700^2\cdot 0.02=9801-490000\cdot 0.029801=9801-9800=1$$

$$\sqrt{0.02}=\frac{1}{0},\frac{99}{700},\frac{19601}{138600},\frac{3880899}{27442100},\cdots$$

$$\sqrt{0.02}=0.14142135623731\cdots$$

$$\frac{3880899}{27442100}=0.14142135623731\cdots$$

・
$$X+Y\sqrt{1.01}=\left(201+20\sqrt{101}\right)^n=\left(201+\frac{200}{10}\sqrt{101}\right)^n=\left(201+200\sqrt{\frac{101}{100}}\right)^n$$

$$=\left(201+200\sqrt{1.01}\right)^n$$

$$\sqrt{1.01}=\frac{1}{0},\frac{201}{200},\frac{80801}{80400},\frac{32481801}{32320600},\cdots$$

$$\sqrt{1.01}=1.00498756211208902\cdots$$

$$\frac{32481801}{32320600} = 1.0049875621120895\cdots$$

平方数でない有理数の平方根を最良に近似する分数群や小数展開は、それぞれの有理数のペル方程式（強１、弱１）を満たす最小の自然数解を初期値として、数式の累乗展開をすることに得ることができます。累乗部分を指数乗にすると高速近似することができます。（分子数、分母数、小数近似の桁数が等比数列的に拡大していきます)。どんな指数乗でも可能です。強１に属する分子数、分母数を用いると最強です。

参考文献

会田等左衛門安明：「最上流　算法平方零約術」（山形大学附属図書館所蔵）

Wikipedia,the free encyclopedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/chebyshev_polinomials

Mathworld:

http://mathworld.wolfram.com/pell equation.htlm

Jeroen Demeyer(2007):Diophantine Sets over Polynomial Rings and Hilbert's Tenth Problem for function Fields　の 77 ﾍﾟｰｼﾞ から 80 ﾍﾟｰｼﾞ

http://cage.ugent.be/~jdemeyer/phd.pdf