積分による冪和計算（紹介）

北海道岩見沢農業高等学校

加藤秀隆

2005年1月に発見したのですが、既に1990年にO.D.Anderson氏によって論文発表されており、現在では[Edwards−Owens−Bloom Algorithm]としてまとめられています。冪和を奇数乗、偶数乗を問わずに下位の冪和をベルヌーイ数を湧き立たせながら積分計算することで入手することができます。ベルヌーイ数は、次の数式により定義される定数です。

$$B_0=1$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=0 \qquad \binom{n}{r}={}_nC_r$$ 組合せ数です。

ここでは、これを次のように定義しなおします。

$$B_0=1$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i}B_i=n+1$$

この定義によるベルヌーイ数を記述すると

$$B_0=1, B_1=\frac{1}{2}, B_2=\frac{1}{6}, B_3=B_5=B_7=B_9=B_{11}=B_{13}=B_{15}=\cdots\cdots=0$$

$$B_4=-\frac{1}{30}, B_6=\frac{1}{42}, B_8=-\frac{1}{30}, B_{10}=\frac{5}{66}, B_{12}=-\frac{691}{2730}, B_{14}=\frac{7}{6}, B_{16}=-\frac{3617}{510}$$

$$\cdots\cdots$$

となります。普通は$B_1=-\dfrac{1}{2}$です。$S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$ とおく。

$$S_{m+1}(n)=\int_0^n(m+1)\cdot S_m(n)dn+B_{m+1}\cdot n \qquad m=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

が成り立ちます。

① $S_0(n)=\sum_{k=1}^{n}k^0=B_0n=1n=n$

② $S_1(n)=\int_0^n 1\cdot S_0(n)dn+B_1n=\int_0^n 1\cdot n\,dn+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{1}{2}n^2+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

③ $S_2(n)=\int_0^n 2\cdot S_1(n)dn+B_2n=\int_0^n 2\cdot(\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{2})dn+\dfrac{1}{6}n=\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6}$

$=\dfrac{1}{6}n(n+1)2n+1)$

④ $S_3(n)=\int_0^n 3\cdot(\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{n}{6})dn+B_3n=\dfrac{n^4}{4}+\dfrac{n^3}{2}+\dfrac{n^2}{4}+0n$

$$=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}$$

$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=(\frac{1}{2}n(n+1))^2$$

⑤ $S_4(n)=\int_0^n 4\cdot(\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{2})dn+B_4n=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{2n^3}{3}-\frac{1}{30}n$

$$=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

⑥ $S_5(n)=\int_0^n 5\cdot(\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{2n^3}{3}-\frac{n}{30})dn+B_5n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}+0n$

$$=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}$$

$$=\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

⑦ $S_6(n)=\int_0^n 6\cdot(\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12})dn+B_6n$

$$=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{1}{42}n$$

$$=\frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

⑧ $S_7(n)=\int_0^n 7\cdot(\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42})dn+B_7n$

$$=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}+0n$$

$$=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}$$

$$=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

⑨ $S_8(n)=\int_0^n 8\cdot(\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12})dn+B_8n$

$$=\frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{1}{30}n$$

$$=\frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

⑩ $S_9(n)=\int_0^n 9\cdot(\frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}+\frac{2n^7}{3}-\frac{7n^5}{15}+\frac{2n^3}{9}-\frac{n}{30})+B_9 n$

$=\frac{n^{10}}{10}+\frac{n^9}{2}+\frac{3n^8}{4}-\frac{7n^6}{10}+\frac{n^4}{2}-\frac{3n^2}{20}+0n$

$=\frac{n^{10}}{10}+\frac{n^9}{2}+\frac{3n^8}{4}-\frac{7n^6}{10}+\frac{n^4}{2}-\frac{3n^2}{20}$

$=\frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$

⑪ $S_{10}(n)=\int_0^n 10\cdot(\frac{n^{10}}{10}+\frac{n^9}{2}+\frac{3n^8}{4}-\frac{7n^6}{10}+\frac{n^4}{2}-\frac{3n^2}{20})dn+B_{10}n$

$=\frac{n^{11}}{11}+\frac{n^{10}}{2}+\frac{5n^9}{6}-n^7+n^5-\frac{n^3}{2}+\frac{5}{66}n$

$=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(3n^8+12n^7+8n^6-18n^5-10n^4+24n^3+2n^2-15n+5)$

$=\frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n^5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5)$

⑫ $S_{11}(n)=\int_0^n 11\cdot(\frac{n^{11}}{11}+\frac{n^{10}}{2}+\frac{5n^9}{6}-n^7+n^5-\frac{n^3}{2}+\frac{5n}{66})dn+B_{11}n$

$=\frac{n^{12}}{12}+\frac{n^{11}}{2}+\frac{11n^{10}}{12}-\frac{11n^8}{8}+\frac{11n^6}{6}-\frac{11n^4}{8}+\frac{5n^2}{12}+0n$

$=\frac{n^{12}}{12}+\frac{n^{11}}{2}+\frac{11n^{10}}{12}-\frac{11n^8}{8}+\frac{11n^6}{6}-\frac{11n^4}{8}+\frac{5n^2}{12}$

$=\frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10)$

⑬ $S_{12}(n)=\int_0^n 12\cdot(\frac{n^{12}}{12}+\frac{n^{11}}{2}+\frac{11n^{10}}{12}-\frac{11n^8}{8}+\frac{11n^6}{6}-\frac{11n^4}{8}+\frac{5n^2}{12})dn+B_{12}n$

$=\frac{n^{13}}{13}+\frac{n^{12}}{2}+n^{11}-\frac{11n^9}{6}+\frac{22n^7}{7}-\frac{33n^5}{10}+\frac{5n^3}{3}-\frac{691}{2730}n$

$=\frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10}+525n^9+525n^8-1050n^7-1190n^6+2310n^5$

$+1420n^4-3285n^3-287n^2+2073n-691)$

積分計算なので力任せではなく、ベルヌーイ数のリストさえ入手していればよく連続的に冪和計算することができます。

文献

１．稲葉芳成　自然数のべき和に関するメモⅡ
http://www.nikonet.or.jp/spring/bekiwa2.pdf
２．J.doucet and A.Salef－Jahromi,Sums of powers of integers
http://www.mc. edu/campus/users/travis/maa/proceedings/spring2002/doucet.jahmi.pdf