2次関数のグラフの書き方のちょっとしたアイデア

2010年11月14日

北海道岩見沢農業高校

加藤秀隆

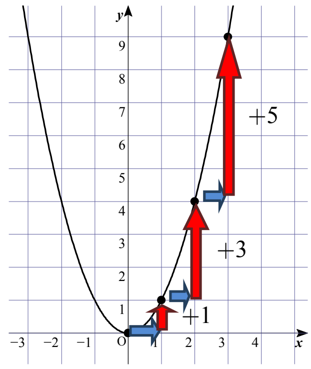
はじめに

数学Ⅰの学習における山場は、「2次関数」です。現場の先生方が悪戦苦闘する場面です。その2次関数のグラフをいかに生徒に書かすか。しかも大多数の生徒に自信をもって書かせることができないか。x^2の係数によりパターン化して、2年前から実践しています。

１．２次関数の標準形の場合

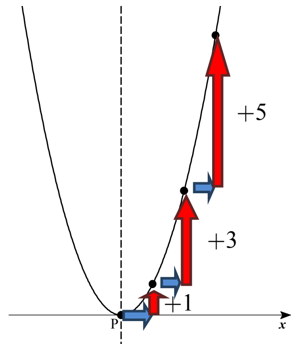
xの変化を$x=0,1,2,3,\cdots$としたときの値$y=x^2$の変化は、$y=0,1,4,9,\cdots$です。中学数学での主流計算です。値yの差分をとると、$0\to1\to3\to5\to\cdots$これをグラフ記入に利用します。書き方の原理です。

$y=x^2$のグラフは、頂点（原点）からx軸方向1進んでy軸方向に1上がり、続いてその点からx軸方向1進んでy軸方向に3上がり、その点からx軸方向1進んでy軸方向に5上がります。この点の取り方を頂点の左側でも行います（点をパクリます)。



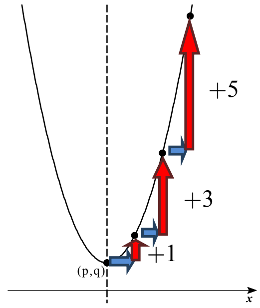
（1）頂点がx軸上にある$y=(x-p)^2$タイプのグラフ

x軸上で括弧（　　）の中を0にする$x=p$の点を出発点（頂点）として、x軸方向1進んでy軸方向に1上がります。続いてその点からx軸方向1進んでy軸方向に3上がります。また、その点からx軸方向1進んでy軸方向に5上がります。この点の取り方を頂点の左側でも行います。



（2）頂点がx軸から離れる$y=(x-p)^2+q$タイプのグラフ

x軸上で括弧（　　）の中を0にする$x=p$の点をqの数値により上下させます。その点を頂点に前述の進み方をさせます。勿論、対称軸対称で左側でも同様の動きをさせます。

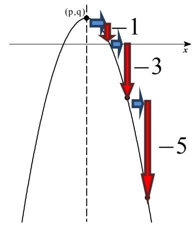


（３） $y=a(x-p)^2+q$ タイプのグラフ

頂点 (p,q) から $1\to3\to5\to\cdots\times a=a,3a,5a,\cdots$ を x 軸方向 1 進んで y 軸方向で上がったり下がったりさせます。

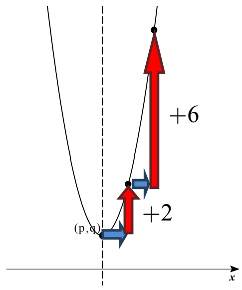
① $y=-(x-p)^2+q$

頂点 (p,q) から $1\to3\to5\to\cdots\times(-1)=-1,-3,-5,\cdots$ を x 軸方向 1 進みながら y 軸方向で順に下げていきます。



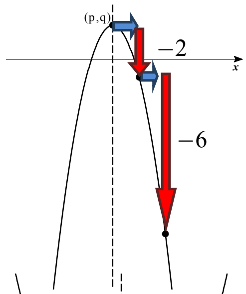
② $y=2(x-p)^2+q$

頂点 (p,q) から $1\to3\to5\to\cdots\times2=2,6,10,\cdots$ を x 軸方向 1 進みながら軸方向で順にげていきます。



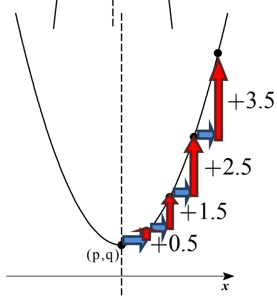
③ $y=-2(x-p)^2+q$

頂点 (p,q) から $1\to3\to5\to\cdots\times(-2)=-2,-6,-10,\cdots$ を x 軸方向 1 進みながら y 軸方向で順に下げていきます。



④ $y=\dfrac{1}{2}(x-p)^2+q$

頂点 (p,q) からを x 軸方向 1 進みながら y 軸方向で順に上げていきます。



⑤その他のタイプ

上がり下がりの原理は同じです。

以上が計算もせず平行移動も気にせずに各軸方向に進む目盛を数えて点を書き込み（プロット）ながらグラフを書く方法です。40 人の学級で 30 人以上の生徒がマスターしています。各学校の実情を呼応して 1 時間で済む場合もあるでしょう。

２．一般形を標準形に変形する工夫について

一般形 $y=ax^2+bx+c$ の変形は、 $x^2\pm2px=(x\pm p)^2-p^2$ を基本にして生徒に計算を進めさせています。

① $y=x^2+4x+5=(x+2)^2-4+5=(x+2)^2+1$

② $y=-x^2+6x-5$

(−)を掛けて、

$-y=x^2-6x+5$

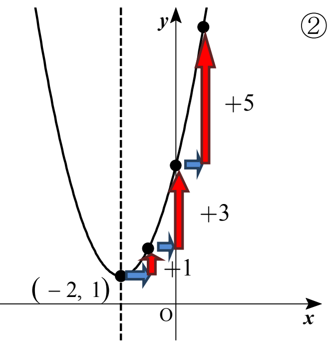
$=(x-3)^2-9+5$

$=(x-3)^2-4$

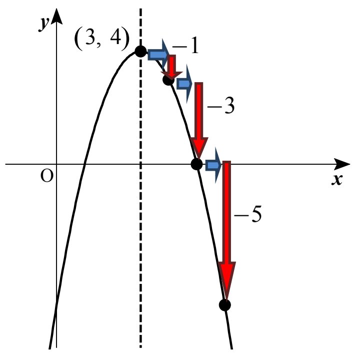
もう一度(−)を掛けて、

$y=-(x-3)^2+4$

①



②



③ $y=2x^2-8x+5$

2 で割って、

$$\frac{y}{2}=x^2-4x+2.5$$

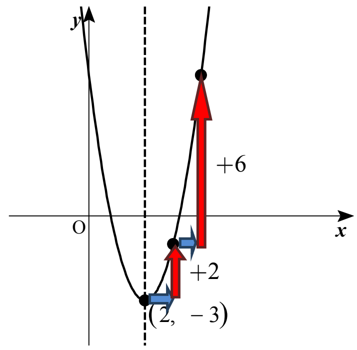
$$\frac{y}{2}=(x-2)^2-4+2.5$$

$$\frac{y}{2}=(x-2)^2-1.5$$

2 を掛けて、

$$y=2(x-2)^2-3$$

③



④ $y=-2x^2-12x-16$

-2 で割って、

$$\frac{y}{-2}=-\frac{2}{-2}x^2-\frac{12}{-2}x-\frac{16}{-2}$$

$$\frac{y}{-2}=x^2+6x+8$$

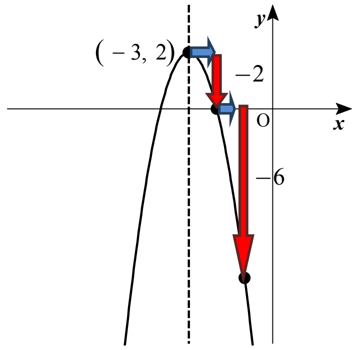
$$\frac{y}{-2}=(x+3)^2-9+8$$

$$\frac{y}{-2}=(x+3)^2-1$$

-2 を掛けて、

$$y=-2(x+3)^2+2$$

④



⑤ $y=\frac{1}{2}x^2-4x+9$

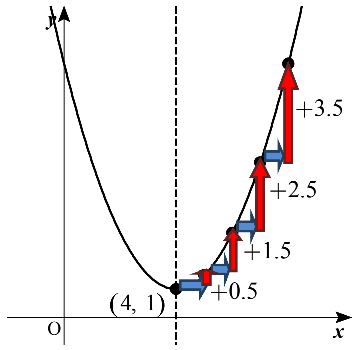
2 を掛けて、

$$2y=x^2-8x+18$$
$$2y=(x-4)^2-16+18$$
$$2y=(x-4)^2+2$$

2 で割って、

$$y=\frac{1}{2}(x-4)^2+1$$

⑤



以上のように一例を見本にして類題を 4 題から 5 題の変形計算をさせてグラフ書きをさせたり、頂点や軸の方程式を答えさせています。これらの変形は、私オリジナルのものではありません。ご存知の現場の先生方が大勢いらっしゃることと存じます。

後記　それぞれの現場で苦労されて 2 次関数のグラフや最大値、最小値を教えていらっしゃることと思います。一助になれば幸いです。