北数教“第８１回数学教育実践研究会”

対数凸関数の紹介

数学コンテスト問題との関係

レポート

日　時　　平成２４年６月２日（土）

会　場　　北海道大学情報教育館３F
スタジオ型多目的中講義室

北海道室蘭栄高等学校　　安　田　富久一

1　はじめに

昨年度の北海道数学コンテストの問題にガンマ関数 $\Gamma(x)$ に関係した問題（本プリントの最終ページ参照）が出題された。

$x>0$ で定義された関数 $f(x)$ で条件

(i) $f(x)>0\,,\ f(1)=1$
(ii) $f(x+1)=xf(x)$
(iii) $2\leqq x<y$ ならば、$f(x)<f(y)$

を満たすものについての問題である。この問の小問 (1)〜(3) は上に示した条件のみで答えられる問題であるが、小問 (4) で、条件 (i)〜(iii) に加えて、次の条件 (iv)

$$\text{(iv)}\ \ \frac{f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)}{f(x)}>\sqrt{x-\frac{1}{4}}\ \ (x\geqq 2)$$

を更に仮定して、$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=A$ とおいたときに

$$\begin{aligned}\text{(4)}\ \ \frac{4n+1}{4(2n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)&<\frac{1}{A^2}\\&<\frac{2n-1}{4n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right)\end{aligned}$$

を証明させる問題になっている。

小問 (4) により、$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値が

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{1}$$

となることがわかる、という数学的意味のある問題である。今回のレポートは、条件 (iv) の唐突さを解消するものとしての『対数凸関数』の紹介である。

2　対数凸関数

2.1　条件 (iii) の変更

条件 (iii) を次のように条件 (iii)$'$ に変更するというのが解消案である。

$$\text{(iii)}'\ \ f(x)f(y)\geqq\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}^2$$

(iii) と (iii)$'$ だけを見ると、(iii) の方がシンプルで良い。(iii)$'$ の良さは、小問 (4) を示すのに、条件 (iv) を仮定しないで良いところにある。事実、(iii)$'$ から (iv) に類似の不等式が得られ、小問

(4) と類似の不等式が得られることから、(1) が得られることになる。小問 (4) と類似の不等式が得られることを示す前に、『**対数凸関数**』について述べておく。

【対数凸関数の定義】

正の値を取る関数 $f(x)$ が対数凸関数であるとは、$\log f(x)$ が凸関数になっていることである。

この定義からすると、定義域内の 2 つの値 $a, b\,(a, b)$ があるとき、

$$t \log f(a) + (1-t) \log f(b) \geqq \log f(ta + (1-t)b)$$

が任意の正の数 t について成り立つということである。

条件 $(\mathrm{iii})'$ は、この t が特別な値 $t = \dfrac{1}{2}$ のときの不等式になっている。ガンマ関数が対数凸関数であることは、$\log(\Gamma(x))$ の第 2 次導関数の正負を調べてわかるよく知られた事実であるので、$(\mathrm{iii})'$ を仮定条件として採用することに不自然さはないと思う。

【 小問 (4 と類似の不等式が得られることを示す 】

$(\mathrm{iii})'$ で $y = x+1$ ととると、$f(x)f(x+1) \geqq \left\{ f\left(x + \dfrac{1}{2}\right) \right\}^2$ である。ここで、条件 (ii) を使うと

$$x\{f(x)\}^2 \geqq \left\{ f\left(x + \frac{1}{2}\right) \right\}^2$$
$$\therefore \quad \sqrt{x} f(x) \geqq f\left(x + \frac{1}{2}\right) \tag{2}$$

となる。(2) で x を $x + \dfrac{1}{2}$ ととると $\sqrt{x + \dfrac{1}{2}} f(x + \dfrac{1}{2}) \geqq f(x+1)$ が得られ、再度 (2) から、

$$\sqrt{n} f(n) \geqq f\left(n + \frac{1}{2}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} f(n+1)$$

$$f(n) = (n-1)!\ ,\ f(n+1) = n! \quad (\because\ (\mathrm{i}), (\mathrm{ii})\ )$$

$$\begin{aligned}
f\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) f\left(n - \frac{1}{2}\right) \quad (\because\ (\mathrm{ii})\ ) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) f\left(n - \frac{3}{2}\right) \quad (\because\ (\mathrm{ii})\ ) \\
&= \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} A
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sqrt{n} \cdot (n-1)! \geqq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} A \geqq \frac{n!}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}$$

これをさらに変形する。

$$\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2^n\cdot n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2 \geqq A^2 \geqq \frac{2}{2n+1}\cdot\left(\frac{2^n\cdot n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2 \tag{3}$$

ここで、$\left(\dfrac{2^n\cdot n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2$ について 2 種類の変形を行う。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2^n\cdot n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2\\ &=(2n+1)\cdot\frac{2^2}{1\times3}\cdot\frac{4^2}{3\times5}\cdot\frac{6^2}{5\times7}\cdots\frac{(2n-2)^2}{(2n-3)(2n-1)}\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}\\ &=(2n+1)\cdot\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{4^2}{4^2-1}\cdot\frac{6^2}{6^2-1}\cdots\frac{(2n-2)^2}{(2n-2)^2-1}\cdot\frac{(2n)^2}{(2n)^2-1}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2^n\cdot n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right)^2\\ &=\frac{(2n)^2}{2n-1}\cdot\frac{2^2}{1\times3}\cdot\frac{4^2}{3\times5}\cdot\frac{6^2}{5\times7}\cdots\frac{(2n-2)^2}{(2n-3)(2n-1)}\\ &=\frac{(2n)^2}{2n-1}\cdot\frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{4^2}{4^2-1}\cdot\frac{6^2}{6^2-1}\cdots\frac{(2n-2)^2}{(2n-2)^2-1}\end{aligned} \tag{5}$$

(3),(4),(5) から

$$\begin{aligned}&\frac{2n-1}{4n}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right)\\ &\leqq\frac{1}{A^2}\\ &\leqq\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right)\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)\end{aligned}$$

小問 (4) と類似の不等式が得られた。

コンテスト問題は次に小問 (5) として、、$\dfrac{f\left(x+\dfrac{1}{3}\right)}{f(x)} > \sqrt[3]{x-\dfrac{1}{3}}\ (x\geqq2)$ を仮定 (v) として加え、$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=B$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=C$ とおくとき、自然数 $n\geqq2$ に対して、

$$\begin{aligned}&\frac{n}{3(3n+1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9n+2}{(3n)^3}\right)<\frac{1}{B^3}\\ &\qquad<\frac{3n-2}{9(3n-1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9(n-1)+2}{(3n-3)^3}\right)\end{aligned}$$

また、

$$\frac{2(3n+1)}{3(3n+2)}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9n-2}{(3n)^3}\right)<\frac{1}{C^3}$$
$$<\frac{2(3n-1)}{9n}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9(n-1)-2}{(3n-3)^3}\right)$$

となることを示す問題としている。この問題においても、条件 (iii)$'$ であれば新たな仮定を用意しなくても類似の不等式が得られることの概略を述べておく。

まず、(iii)$'$ から

$$f(x)f(y)f(z)\geqq\left\{f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right\}^3 \tag{6}$$

であることが次のようにしてわかる。

$s=\dfrac{x+y+z}{3}$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned}\left\{f\left(\frac{x+y+z+s}{4}\right)\right\}^4 &\leqq\left\{f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{z+s}{2}\right)\right\}^2\\ &\leqq f(x)f(y)f(z)f(s)\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、$x+y+z=3s$ であることから $\dfrac{x+y+z+s}{4}=s$ なので、(7) より (6) が成り立つことがわかる。

(6) において、$y=x, z=x+1$ とおくと、

$$\{f(x)\}^2f(x+1)\geqq\left\{f\left(x+\frac{1}{3}\right)\right\}^3$$
$$\therefore\quad \sqrt[3]{x}f(x)\geqq f\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

が得られる。この不等式が仮定 (v) に相当する役目を果たし、類似の不等式が得られる事になる。詳しい変形の過程については、コンテストの解説を読んで欲しい。問題作成者の北海道の高校生への数学教育への思いが伝わる解説なので、是非ご一読ください。

[問題] $x>0$ で定義された関数 $f(x)$ が次の条件を満たすとき、下の問に答えよ。

条件：

(i) $f(x)>0\,,\,f(1)=1$

(ii) $f(x+1)=xf(x)$

(iii) $2\leqq x<y$ ならば、$f(x)<f(y)$

(1) $f(2),f(3),f(4),f(5),f(6)$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 自然数 n に対して、$f(n+1)=n!$ であることを示せ。

(3) $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=A$ とおく。自然数 n に対して、

$$f\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}A$$

となることを示せ。

さらに、関数 $f(x)$ は条件：(iv) $\dfrac{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}{f(x)}>\sqrt{x-\dfrac{1}{4}}$ $(x\geqq 2)$ を満たす。そのとき、

(4) (3) と合わせて、自然数 $n\geqq 2$ に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned}\frac{4n+1}{4(2n+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)&<\frac{1}{A^2}\\&<\frac{2n-1}{4n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(2n-2)^2}\right)\end{aligned}$$

実数 X に対して、3 乗して X になる実数を $\sqrt[3]{X}$（3 乗根 X と読む）で表すこととする。さらに、関数 $f(x)$ が条件：(v) $\dfrac{f\left(x+\frac{1}{3}\right)}{f(x)}>\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{3}}$ $(x\geqq 2)$ を満たす。そのとき、

(5) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=B\,,\,f\left(\dfrac{2}{3}\right)=C$ とおく。自然数 $n\geqq 2$ に対して、

$$\begin{aligned}\frac{n}{3(3n+1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9n+2}{(3n)^3}\right)&<\frac{1}{B^3}\\&<\frac{3n-2}{9(3n-1)}\cdot\left(1-\frac{11}{3^3}\right)\left(1-\frac{20}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9(n-1)+2}{(3n-3)^3}\right)\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\frac{2(3n+1)}{3(3n+2)}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9n-2}{(3n)^3}\right)&<\frac{1}{C^3}\\&<\frac{2(3n-1)}{9n}\cdot\left(1-\frac{7}{3^3}\right)\left(1-\frac{16}{6^3}\right)\cdots\left(1-\frac{9(n-1)-2}{(3n-3)^3}\right)\end{aligned}$$

となることを示せ。