北数教“第７７回数学教育実践研究会”

数列が加速するって！

レポート

日　時　　平成２３年6月１１日(土)

会　場　　北海道大学情報教育館３F
　　　　　スタジオ型多目的中講義室

北海道室蘭栄高等学校　　安　田　富久一

1　はじめに

収束の加速とはどういうものかを、具体例でイメージ作りをしておこう。

次の方程式は天体力学で**ケプラー（$Kepler$）の方程式**と呼ばれているものである。

$$\omega t = \theta - \varepsilon \sin\theta \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

ここに、ω は太陽を中心にして楕円軌道を描く天体の平均角速度であり、ε は楕円軌道の離心率、θ は楕円軌道を極座標表示した $r = a(1 - \varepsilon\cos\theta)$ に現れる θ である。時刻 t の時に天体がどこにいるかを、ケプラーの方程式から θ を求めることで、その位置を知ることができるのである。

しかし、ケプラーの方程式から θ を t の関数として表した場合、その関数は初等関数表示できないことが知られている。

そこで、このケプラーの方程式でどのように θ を数値的にどう求めるかという方法を紹介する。

この方法を紹介する中で、今回のレポートのタイトルにある**数列の加速**を紹介する。

2　【方程式と不動点】

x を点と見て、$x = f(x)$ の解 x を不動点という（ $f(x)$ を、x から新たに $f(x)$ を作ってみたら、元と変わらない x だった。何も動いていない)。このタイプの方程式について、関数 $f(x)$ がある種の条件を満たせば、

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

という漸化式で決まる数列 $\{a_n\}$ を考えると、a_n に極限値が存在し、その極限値を α とすれば、α は $x = f(x)$ の解になっている。細かいことにこだわらずに粗筋を見れば

$$\begin{aligned} & \alpha = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = f(\alpha) \\ \therefore \quad & \alpha = f(\alpha) \end{aligned}$$

で、確かに α は $x = f(x)$ の解になっている。

この方法を実際にケプラーの方程式に適用するとどうなるかを見てみよう。(1) において、$\omega t = 0.8\,, \varepsilon = 0.2$ として θ を求めよう。方程式 (1) は

$$\begin{aligned} & 0.8 = \theta - 0.2\sin\theta \\ \therefore \quad & \theta = 0.8 + 0.2\sin\theta \quad \cdots\cdots \quad (3) \end{aligned}$$

である。この (3) を見て、次の漸化式を考える。

$$\begin{cases} a_1 = 0.8 & \cdots\cdots \quad (4) \\ a_{n+1} = 0.8 + 0.2\sin a_n & \cdots\cdots \quad (5) \end{cases}$$

$\omega t = 0.8\,, \varepsilon = 0.2\,, a_1 = 0.8$ という値設定は、P. ヘンリッチ著 一松信・平本巌・本田勝=共訳『数値解析の基礎』 培風館 初版第４刷 という本の 66 ページにある問題 5 のものであり、この設定が今回のレポートの説明にうまく合うので使わせていただいた。

3 『数列の加速のイメージ』

漸化式 (4),(5) で決まる a_n を、第 1 項から第 20 項まで計算（小数第 15 位まで表示）したものが右の表の a_n の縦の欄である。この欄を上から下に見ていくと、第 17 項目以降の状況から、$n \to \infty$ のとき、

$$a_n \to 0.964333887695223 \cdots \qquad \cdots\cdots (6)$$

となることがわかる。これは、**“小数第 15 位まで求めるのに $n = 17$ までかかった”** ことを意味している。

ところで、この a_n を用いて、次のように新たに数列 $\{b_n\}$ を作ってみる。

$$b_n = a_n - \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}$$

そして、この b_n を計算した欄を同様に上から見ていくと、(6) が既に第 8 項で出現している。これは、**“小数第 15 位まで求めるのに $n = 8$ しかかからなかった”** ことを意味している。つまり、収束するスピードが凄く速くなった感じがしないだろうか。上に示した a_n から新しく作った b_n の方法で、収束はいつでも加速されるのだろうか。次にこのことについて紹介する。

n	a_n	b_n
1	0.8	0.964642507125105
2	0.943471218179905	0.964338542491760
3	0.961920102787199	0.964333949372777
4	0.964058254970601	0.964333888498502
5	0.964302461289050	0.964333887705664
6	0.964330305227986	0.964333887695358
7	0.964333479318463	0.964333887695225
8	0.964333841143172	0.964333887695223
9	0.964333882388621	0.964333887695223
10	0.964333887090308	0.964333887695223
11	0.964333887626267	0.964333887695223
12	0.964333887687362	0.964333887695223
13	0.964333887694327	0.964333887695223
14	0.964333887695121	0.964333887695223
15	0.964333887695211	0.964333887695223
16	0.964333887695221	0.964333887695223
17	0.964333887695223	
18	0.964333887695223	
19	0.964333887695223	
20	0.964333887695223	

4 【収束の加速：エイトケンの $\varDelta^2-$ 法】

数値解析という研究分野がある。その分野で有名な *Aitken* という人が

” On Bernoulli’s numericsal solution of algebraic equation ”

「代数方程式のベルヌーイの数値解について」

という論文を 1926 年に発表したそうだ。論文中で **収束の加速** について論じた部分の定理を紹介しよう。この定理の加速の方法は **Aitken の Δ^2- 法** と呼ばれている（なぜ Δ^2 などという記号がついているかは、差分に関係している）。

【定理】($Aitken$ の Δ^2- 法)

数列 $\{a_n\}$ は α に収束するとする。また、$d_n = a_n - \alpha$ とおく。このとき、次のことが成り立っているとする。

① 十分大きな n について $d_n \neq 0$(“ある項以降ずっと $d_n \neq 0$ ”と同じ意味)

② $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ は収束する。

③ ②の極限値を ω とすると、$|\omega| < 1$ である。

このとき、十分大きな n については常に $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \neq 0$ であることがわかり、そのような n について

$$b_n = a_n - \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

で定義される数列 $\{b_n\}$ を新しく作ると、

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - \alpha}{a_n - \alpha} = 0$$

が成り立つ。

つまり、数列 $\{b_n\}$ は $\{a_n\}$ よりも速く α に収束していることになる(収束が加速された)。

【定理の証明】

$\varepsilon_n = \dfrac{d_{n+1}}{d_n} - \omega$ とおと、

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= (\omega + \varepsilon_n) d_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)\\
a_{n+1} - a_n &= d_{n+1} - d_n\\
&= (\omega - 1 + \varepsilon_n) d_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)\\
a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n &= (a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n)\\
&= (\omega - 1 + \varepsilon_{n+1}) d_{n+1} - (\omega - 1 + \varepsilon_n) d_n \quad (\because (9)) \quad \cdots\cdots (10)\\
&= \left\{(\omega - 1)^2 + \omega(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) - 2\varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}\right\} d_n \quad \cdots\cdots (11)
\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}
b_n - \alpha &= d_n - \frac{(\omega - 1 + \varepsilon_n)^2 d_n}{(\omega - 1)^2 + \omega(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) - 2\varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}} \quad (\because (7), (9), (11))\\
&= \frac{\omega(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) - 2\varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_n(\omega - 1) - \varepsilon_n^2}{(\omega - 1)^2 + \omega(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) - 2\varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}} d_n
\end{aligned}$$

となる。ここで、$\varepsilon'_n = \omega(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) - 2\varepsilon_n + \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$ とおく。$n \to \infty$ のとき $\varepsilon_n \to 0$ なので、$\varepsilon'_n \to 0$ であることから

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - \alpha}{a_n - \alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon'_n - 2\varepsilon_n(\omega - 1) - \varepsilon_n^2}{(\omega - 1)^2 + \varepsilon'_n} = 0$$

よって示された。（証明終わり）

ここで、(11) から $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=\{(\omega-1)^2+\varepsilon'_n\}d_n$ であるが、これから十分大きな n について $|a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n|=\dfrac{1}{2}(\omega-1)^2|d_n|>0$ となり、$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n\neq 0$ がわかる。つまり、(7) の分母は十分大きな n について決して 0 になることはなく、b_n をちゃんと定義できることが保証される。

5 【付録：縮小写像と不動点】

2【方程式と不動点】で、$f(x)$ がある種の条件を満たせば、方程式 $x=f(x)$ の解を漸化式 (2) により求めることが出来ることを書いておいた。ここで、定義域その他細かい話しをせず、その条件を述べておく。

$0<r<1$ である定数 r が存在し、どんな x,y についても

$$|f(x)-f(y)|\leqq r|x-y| \quad \cdots\cdots \quad (12)$$

が成り立つような関数 $f(x)$ を縮小写像と言う。

縮小写像はただ一つの不動点を必ず持ち、その不動点は漸化式 (2) で決まる数列の極限により決まることが知られている。このことの証明は、(2) により果たされるが、それにはコーシー列に関する知識を必要とする。

(12) はリプシッツ (*Lipschitz*) 条件と言われている。