北数教“第７７回数学教育実践研究会”

数学の問題を創る
発見力・一般化力を磨く

レポート

日　時　　平成２３年6月１１日(土)

会　場　　北海道大学情報教育館３F
スタジオ型多目的中講義室

北海道室蘭栄高等学校　　安　田　富久一

次のページから始まる本論を見ないで、次のレジュメ的問題を解いて楽しんで下さい。

今回のレポートのメインは最後のページで、どのようにして問題を作ったかを記載しました。そのメインの前に、レジュメ的問題を用意しました。あまり時間をかけずに目を通して下さい。その次に解答を詳しく書きました。そして、最後が先ほども書きましたが、メインになります。【調理場風景】というネーミングにして書きました。

【レジュメ的問題】

【１】$a_n = \left[\sqrt{2}n\right]$ とおく。次の表において、$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ の値が上段の数になるように、下段の欄に $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を記入せよ。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

【２】上の表の上段において、下段が空欄になっている数を小さい順に並べた数列を $b_1, b_2, b_3, \cdots$ とする。このとき、次の表を完成せよ。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n										
b_n										

【３】数列 $\{b_n\}$ の一般項を予測せよ。

【４】上の予測が正しいことを証明せよ（下の余白はかなり狭いと思う）。

【５】【４】の事実をもとにして、（数学的に）できるだけ綺麗な表現に仕上げよ。

【 1 】

$x_n = \sqrt{2}n$ とおくと

$$x_1 = 1.4142 \quad x_2 = 2.8284 \quad x_3 = 4.2426 \quad x_4 = 5.656 \quad x_5 = 7.0710 \tag{1}$$
$$x_6 = 8.4852 \quad x_7 = 9.8994 \quad x_8 = 11.313 \quad x_9 = 12.72 \quad x_{10} = 14.1421 \tag{2}$$

なので、$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 5, a_5 = 7, a_6 = 8, a_7 = 9, a_8 = 11, a_9 = 12, a_{10} = 14$ となり

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_1	a_2		a_3	a_4		a_5	a_6	a_7		a_8	a_9		a_{10}	

となる。

近似計算で厳密な判断はよろしくない、という気になる生徒のために、次のような説明が出来ることを話してやれる。

集合 A_k を $A_k = \{x \in \mid k^2 \leqq x < (k+1)^2\}$ と定義する。
$a_n = k$ と ${x_n}^2 = 2n^2 \in A_k$ とは同値であり、$2n^2$ は自然数の計算なので近似計算しなくてよい。今、

$$\begin{array}{lllll} {x_1}^2 \in A_1, & {x_2}^2 \in A_2, & {x_3}^2 \in A_4, & {x_4}^2 \in A_5, & {x_5}^2 \in A_7 \\ {x_6}^2 \in A_8, & {x_7}^2 \in A_9, & {x_8}^2 \in A_{11}, & {x_9}^2 \in A_{12}, & {x_{10}}^2 \in A_{14} \end{array}$$

なので、上の表のようになる。

【 2 】

上の表の上段において、下段が空欄になっている数を小さい順に並べた数列を $b_1, b_2, b_3, \cdots$ とする。このとき、次の表を完成せよ。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	2	4	5	7	8	9	11	12	14
b_n	3	6	10	13						

【 3 】

$b_n - a_n$ が n の 2 倍になっている事に気づく。予想は

$$b_n = 2n + [\sqrt{2}n] \cdots\cdots \tag{3}$$

が全ての自然数 n について成り立つことである。

【 4 】

上の予想が正しいことを証明するには、何を示せばよいかを考えてみる。次の ①〜③ を調べればよい（a_n, b_n のどちらかに主眼をおかず、対等にみているところが良いと思う）。

① $m \neq n$ なら $a_m \neq a_n$, $b_m \neq b_n$
② 任意の m, n について $a_m \neq b_n$
③ a_n にも b_n にもならない自然数はない。

以下、①〜③ を証明するが、① について、例えば、a_n と a_{n+1} はその差が $\sqrt{2}$ あるので、a_n と a_{n+1} とが共に連続 2 整数を両端に持つ区間に入ることはなく、a_n は狭義の単調増加数列である。同じく、b_n も狭義の単調増加数列なので、① は明かである。

② は背理法で示す。$a_m = b_n$ となる自然数 m, n があったとして、その等しい値を k とする。$a_m = k$ から

$$[\sqrt{2}m] = k \quad \therefore\ k \leqq \sqrt{2}m < k+1$$

となるが、$\sqrt{2}m$ は無理数なので、$k = \sqrt{2}m$ となることはない。

$$\therefore\ k < \sqrt{2}m < k+1$$
$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{2}}k < m < \frac{1}{\sqrt{2}}(k+1) \quad \cdots\cdots \quad (4)$$

同様に、

$$[\sqrt{2}n] = k - 2n \quad \therefore\ k - 2n < \sqrt{2}n < k - 2n + 1 \quad \cdots\cdots \quad (5)$$
$$\therefore\ \frac{1}{2+\sqrt{2}}k < n < \frac{1}{2+\sqrt{2}}(k+1) \quad \cdots\cdots \quad (6)$$

である。ここで、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 \quad \cdots\cdots \quad (7)$$

なので、(4),(6),(7) より $k < m+n < k+1$ となるが、連続 2 整数 $k, k+1$ の間に整数 $m+n$ が存在することになり矛盾である。（② の証明：終わり）

> 単に a_m と b_n が等しいという $a_m = b_n$ のままでも矛盾を導くことは可能だが、上で示した証明のように、少し言い換えて、k という同じ値になっている（具体感が少し加味されているように私は感じている ）、とすることで非常に見やすくなっている。

③ について見ていく。これも背理法による。自然数 k が a_n に現れない数であるとすると、自然数 n_a があり、

$$\sqrt{2}n_a < k < \sqrt{2}(n_a+1) - 1 \quad \cdots\cdots \quad (8)$$

となる。同様にして、自然数 k が b_n に現れない数であるとすると、自然数 n_b があり、

$$(2+\sqrt{2})n_b < k < (2+\sqrt{2})(n_b+1)-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

である。よって、自然数 k があり、k が a_n にも b_n にも現れない数であるとすると、(8),(9) から

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(k+1)+\frac{1}{2+\sqrt{2}}(k+1)-2 < n_a+n_b < \frac{1}{\sqrt{2}}k+\frac{1}{2+\sqrt{2}}k$$
$$\therefore \quad k-1 < n_a+n_b < k \quad (\because\ (7)\ )$$

を得る。これは ② のときと同じ理由で矛盾する。（③ の証明：終わり）

【 5 】

現段階でわかっていることを、今回見つけたとおりに書いてみると

『数列 $[\sqrt{2}n]$ は、自然数の上を重複することなく渡っていくが、その歩き残した所を、数列 $2n+\sqrt{2}n$ はぴったりダブらず漏らさず渡っていく。』

となる。これは、$[\sqrt{2}n]$ という数列が先にあり、数列 $2n+[\sqrt{2}n]$ がし残した穴埋めをしているような順番性を感じる。これはまた、順番を逆にして

『数列 $2n+\sqrt{2}n$ が先にあり、その空いたところを数列 $[\sqrt{2}n]$ がぴっちり埋めていく。』

という書き方をしても事実としては正しい。

ところで、【 4 】で予想を証明するときにこのようなことをつぶやいた。

（a_n, b_n のどちらかに主眼をおかず、対等にみているところがいいと思う）

この思いを大切にすると

『2 つの数列 $[\sqrt{2}n]$, $2n+[\sqrt{2}n]$ があり、どの 2 項も異なり、しかも全体として自然数全体になっている。』

という表現になる。

バランスや対称性を大切にする数学としては、後者が良いように私は感じる。

これ以上何とか綺麗な表現にできないだろうか。②の証明の (5) で気がついていたい事実がある。$[\sqrt{2}n]+2n=[(2+\sqrt{2})n]$ である。これを使って表現し直すと、

『2 つの数列 $[\sqrt{2}n]$, $[(2+\sqrt{2})n]$ があり、どの 2 項も異なり、しかも全体として自然数全体になっている。』

という表現になる。そして、ここまでくると数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がどちらも $\{[\alpha n]\}$ という形をしていることに気づく。すると、

【興味】

次のことが成り立つような 2 つの数 α, β はどんな数だろうか。

2 つの数列 $[\alpha n]$, $[\beta n]$ があり、この 2 つの数列は

④ どの 2 項も異なる。

⑤ 全体として自然数全体になる。

ということが知りたくなってくる。そして、実はその結果は次の通りである。

【結果】

2 つの数列 $[\alpha n]$, $[\beta n]$ があり、この 2 つの数列が

④ どの 2 項も異なる。

⑤ 全体として自然数全体になる。

となるための α, β がみたすべき必要十分条件は、

⑥ α, β は正の無理数である

⑦ $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$

である。

以下、この【結果】が正しいことを証明するが、十分性については【4】で示したことと全く同様に示せるので、以下には必要性を示す。

【 ④,⑤ なら ⑥,⑦ であることの証明 】

まず、⑦ について示す。k を自然数として $[\alpha n] \leqq k$ をみたす自然数 n の個数を n_a 、$[\beta n] \leqq k$ をみたす自然数 n の個数を n_b とする。④,⑤ のとき、

$$n_a + n_b = k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

となる。n_a は $1 \leqq \alpha n < k+1$ をみたす自然数 n の個数に等しい。

$$\frac{1}{\alpha} \leqq n < \frac{k+1}{\alpha}$$

なので、

$$\left(\frac{k+1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) - 2 < n_a < \left(\frac{k+1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right) + 2$$

$$\therefore \quad \frac{k}{\alpha} - 2 < n_a < \frac{k}{\alpha} + 2$$

n_b についても同様に考えて

$$\frac{k}{\alpha} + \frac{k}{\beta} - 4 < n_a + n_b < \frac{k}{\alpha} + \frac{k}{\beta} + 4$$

$$\therefore \quad 1 - \frac{4}{k} < \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1 + \frac{4}{k} \quad (\because (10)) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

(11) において、$k \to \infty$ を考えると、$\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ となる。よって、⑦ が成り立たなければならないことがわかる。

次に、⑥ を証明する。正の数であることは明らか。 無理数であることについては背理法による。もし、α が有理数であるとすれば、自然数 p, q が存在して $\alpha = \dfrac{q}{p}$ と表せる。そして、今示した ⑦ を考えると、$\beta = \dfrac{q}{q-p}$ である。このことから

$$q = [\alpha p] = [\beta(q-p)]$$

がわかる。これは、④ に矛盾する。よって、⑥ が成り立たなければならない。（必要性の証明終わり）

以上、問題とその解答を見てきた。最後に、このような問題をどのような経緯で作ったかをページを改めて述べる。このレポートの本題になる。

【調理場風景】

今回の問題をどのようにして作っていったかを、経緯等を含めて以下に述べる。今回レポートのメインである。素材をもとにどのように料理をしたかという視点で見てもらえるとありがたい。

【 素材 】

数学セミナーの記事“組み合わせ論逍遙”(2008 年 4 月号から一年間連載) に、3 ページで示した【結果】が紹介されていた (4 月号の 62 ページ)。この【結果】については、ヴィノグラードフ著、三瓶与右衛門・山中健訳「整数論入門」(共立全書) の第 2 章の練習問題 3 として書かれている (数学セミナーの記事にもそのことが紹介されている)。

この【結果】が今回の問題になるまでの経緯を述べておく。

1. 特別な値の α, β のとき、実際にどう値が出てくるか見てみたくなった。
2. 手始めに、1 より大きい無理数で自分にとって一番身近な数 $\alpha = \sqrt{2}$ の場合を考えてみることにした。
3. このとき、$\beta = 2 + \sqrt{2}$ はすぐに ⑦ から求まる。
4. $[\sqrt{2}n]$, $[(2+\sqrt{2})n]$ をみると、後者については $2n + [\sqrt{2}n]$ となるので、前者を a_n とすると後者は $b_n = 2n + a_n$ になる。
5. $2n$ は非常にわかりやすい規則なので、法則性を見抜く眼を育てる問題にしたいと思った。
6. $b_n - a_n$ はどんな数列になるか、と直接的にはなるべく聞きたくなかった (気づいたときの喜びをなるべく大きくしたかった：理解の喜びよりも発見の喜びに主眼を置いた)。
7. 以上のことで今回の問題の粗筋が出来た。
8. さらに、具体的な $a_n = [\sqrt{2}n]$ のときに、奥を深くしたくなり、問題 (5) を用意した。

生徒の状況に合わせ、

- $[x] = k$ と $k \leqq x < k + 1$ が同値であることを気づかせる問題を付け加える
- 上で、さらに k が具体的な数の場合の問題を付け加える

などの小問を作ることも可能。

【補足】

一見すると、数列記号 a_n 等が書いてあるので、数列を学習していないとこの問題を生徒に出せないように見えるかも知れない。それは、数列 $a_n = [\sqrt{2}n]$ ではなく、式 $f(n) = [\sqrt{2}n]$ と処理すれば OK。

また、【結果】は極限が出てくるから無理だと見えるかも知れない。それなら、極限などという言葉を使わず、“全ての自然数 n について $0 \leqq x < \dfrac{1}{n}$ が正しくなるような数 x はどんな数だと思う？”というような問題を別に考えさせておいて、この問題を示すとよいように思う（もっと言えば、このような問題を解かせておくと、極限の概念が逆に身につきやすいかも知れないようにも思う）。