対　称　式

1　対称式

$$f(x,y)=3x^2-2xy+3xy^2$$

で、x の代わりに y を、y の代わりに x を入れ替えた式 $f(y,x)$ を作ると

$$f(y,x)=3y^2-2yx+3y^2x$$

であり、これら 2 式の右辺を見ると、

$$f(x,y)=f(y,x)$$

です。つまり、x と y をそっくり入れ替えても、式は変わりません。このように、x と y をそっくり入れ替えても式が変わらないような x と y の多項式を、x と y の**対称式**と言います。

＜練習１＞

次の多項式で、x と y の対称式はどれですか。

x と y の対称式
$f(x,y)=f(y,x)$

(1) x^2+y^2　(2) $x-y$　(3) $4xy$　(4) $x^3+3x^2+3xy^2+y^3$

(5) $(x-y)^2$　(6) $2x^2-3xy+y^2$　(7) $5x^8y^3-3x^3y^2+5x^3y^8-3x^2y^3$

練習 1 の答えはプリントの最後に付けておきました。

2　基本対称式

$x+y$, xy はどちらも対称式です。これを

$$\begin{cases} x+y=A \\ xy=B \end{cases}$$

とおくことにします。皆がよく知っている変形で

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=(x+y)^2-2xy=A^2-2B \\ x^3+y^3&=(x+y)^3-3xy(x+y)=A^3-3AB \end{aligned}$$

となり、x^2+y^2 , x^3+y^3 は A と B のみの式に書き換えられます。ところで、x^2+y^2 , x^3+y^3 はどちらも対称式です。これ以外の対称式も必ず A と B のみの式に書き換えられるか、考えてみたくなります。

＜練習２＞

次の x と y の対称式を、A と B のみの式に書き換えよ。

(1) $3x^2-xy+3y^2$　　(2) $2x^2y+2xy^2$　　(3) $x^2y-x+xy^2-y$

では、どんな対称式でも A と B の式に書き換えられるでしょうか?

2.1　簡単な場合

まず、

$$2xy=2B$$
$$-4x^3y^3=-4(xy)^3=-4B^3$$

のように、px^ky^ℓ で、$k=\ell$ の時は簡単に B のみに書き換えられます。

だから、$k\neq\ell$ の時を考えればよいことになります。

2.2　今までの例で気付くこと

これまで見たどの例でもそうですが、例えば練習２の (2) を見ると、式の中に $2x^2y$ があると、x と y を入れ替えた $2y^2x=2xy^2$ も必ず式の中にあります。練習１の (7) でも、$5x^8y^3$ があると x と y 入れ替えた $5y^8x^3=5x^3y^8$ が式の中にあります。他の例でもそうなっています。自分で確かめて下さい。

今述べたことは、対称式がどんな式のことだったかを考えれば当たり前のことですね。これを一般的な形で言い換えると次のようになります。

(A)　対称式では、px^ky^ℓ の項があれば、必ず $px^\ell y^k$ という項がある。また、px^ℓ という項があれば、py^ℓ という項がある。

$$\Downarrow \text{更に言い換えて}$$

(B)　対称式では、次の形の項がペアーで存在している。

$$px^ky^\ell \underset{\text{ペア}}{\longleftrightarrow} px^\ell y^k$$
$$px^\ell \underset{\text{ペア}}{\longleftrightarrow} py^\ell$$

$$\Downarrow \text{更に言い換えて}$$

(C)　対称式は、$(px^ky^\ell+px^\ell y^k)$, $(px^\ell+py^\ell)$ や px^ky^k の形の項を、何個かたしたりひいたりしたものである。

この (c) のことを実際の式で見ておこう。

＜例＞

(1) 練習 1 の (1) は、(x^2+y^2) の 1 個のペア
(2) 練習 1 の (4) は、$(x^3+y^3)+(3x^2y+3xy^2)$ の 2 個のペア。
(3) 練習 2 の (1) は、$(3x^2+3y^2)-(xy)$ の 2 個のペア。

＜練習３＞

今までに出てきた対称式、また自分で知っている対称式について、上の例と同じことを自分で見ておくこと。

2.3　前節 2.2 のタイプの精選

前節の (c) から、対称式は

① px^ky^k のタイプ
② px^k+py^k のタイプ
③ $px^ky^\ell+px^\ell y^k$ のタイプ

の 3 つのタイプの式を足したり引いたりしたものだということがわかったから、この①,②,③の各タイプの式がそれぞれ”A”と”B”の式で書けることがわかればよい。

2.1 で見たように、①のタイプは”B”の式になる。実際、

$$x^ky^k=(xy)^k=B^k$$

次に、一つとんで③のタイプを見てみよう。例えば、$k=2,\ell=5$ のときについて考えると、

$$\begin{aligned} px^2y^5+px^5y^2 &= px^2y^2(x^3+y^3) \\ &= pB^2(x^3+y^3) \end{aligned}$$

のように、①のタイプをくくり出すことができ、残りの部分は②のタイプになっている。

だから、最終的に②のタイプの式が”A”と”B”の式で書ければ、すべてが解決する。②のタイプは、$p(x^k+y^k)$ となるから、結局 x^k+y^k が A と B の式で書けるか? ということが問題!

2.4　いよいよ大詰め!!

x^k+y^k のタイプの式を順番に並べて

$$\begin{array}{ccccl} f_1(x,y) & = & x+y & & 1\text{ 番目の式} \\ f_2(x,y) & = & x^2+y^2 & & 2\text{ 番目の式} \\ f_3(x,y) & = & x^3+y^3 & & 3\text{ 番目の式} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \quad\vdots \\ f_k(x,y) & = & x^k+y^k & & \text{k 番目の式} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & \text{以下永遠に続く。} \end{array}$$

としましょう。ところで、1 番目は ”A” ですぐに書ける。

$$f_1(x,y) = A$$

2 番目も皆がよく知っているように

$$\begin{aligned} f_2(x,y) = x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy \\ &= A^2 - 2B \end{aligned}$$

と、やはり A と B の式になる。では、3 番目だが、これも皆が知っている。しかも変形の仕方をいくつか知っているだろうけれど、後の説明のことを考えて次の方法のものを見ておくことにする。

$$\begin{aligned} f_3(x,y) = x^3+y^3 &= (x+y)(x^2+y^2) - x^2y - xy^2 \\ &= (x+y)(x^2+y^2) - xy(x+y) \\ &= A \cdot f_2(x,y) - B \cdot f_1(x,y) \end{aligned}$$

ここで、f_1, f_2 は既に A と B の式だということを調べておいたので、f_3 も A と B の式になる。実際に書いてみれば、

$$f_3(x,y) = A(A^2-2B) - BA$$

（注）　この右辺は計算しないでおいておきます。なぜなら私達の目標は、f_3 が A と B の式になるのを見ることであって、A と B のどんな式になるかを計算することではないから、A と B の式であることがわかればそれで充分 !!

次は 4 番目です。

$$\begin{aligned} f_4(x,y) = x^4+y^4 &= (x+y)(x^3+y^3) - x^3y - xy^3 \\ &= (x+y)(x^3+y^3) - xy(x^2+y^2) \\ &= A \cdot f_3(x,y) - B \cdot f_2(x,y) \end{aligned}$$

で、f_2, f_3 は既に A と B の式だということを調べておいたので、f_4 も A と B の式になる。

　どうだろう。何か気づかないだろうか。f_3 や f_4 が A と B の式に書けることを見るのに使った方法に共通のことがあるね。それは、A と B の式に書けるとわかっている番号の式を使って、次の番号の式が A と B で書けることを言っている所です。これを図式的に書いてみよう。

$$\begin{array}{lcl} \underline{f_1\,,\,f_2} : \text{O.K.} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} & f_3\text{:O.K.} \\ f_1\,,\,\underline{f_2\,,\,f_3} : \text{O.K.} & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} & f_4\text{:O.K.} \\ f_1\,,\,f_2\,,\,\underline{f_3\,,\,f_4} : \text{O.K.} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \text{以下続く} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{array}$$

　つまり、最初の f_1, f_2 についてわかっていることから、f_3 のことがわかり、次に、新たにわかった f_3 を加え、f_2, f_3 についてわかっていることから、f_4 のことがわかる。このように、前のことを使って次々と一つずつ新たに次の番号のことがわかっていく、という方法だ。このような状況を数学で “<ruby>帰納的<rt>きのうてき</rt></ruby>” と呼んでいる。

しかし、このような方法が 4 番目の f_4 以降も本当に続けられるかどうかを（形式的に）完璧に調べる前に、上の方法を使って、f_5, f_6 が A と B の式で書けることを皆は自分で調べてもらいたい。

＜練習４＞

f_5, f_6 が A と B の式で書けることを調べよ。

では、上に述べた方法がどこまでも続けていけることの保証をしてみよう。一般に

$$\begin{aligned} f_{k+2}(x,y) = x^{k+2}+y^{k+2} &= (x+y)(x^{k+1}-y_{k+1}) - x^{k+1}y - xy^{k+1} \\ &= (x+y)(x^{k+1}-y_{k+1}) - xy(x^k - y^k) \\ &= Af_{k+1}(x,y) - Bf_k(x,y) \end{aligned}$$

これは、f_k とその次の番号の f_{k+1} とが A と B の式ならば、その更に次の番号の f_{k+1} も A と B の式になることを言っている。k は特定の値ではなく一般の値だから、上の方法がどこまでも続けていける保証になる。

よって、k の値が何であれ、上の方法を続けていって x^k+y^k が A と B の式になることがわかる。

これで、完全に当初の問題が解決した。

さて、以上のことから、対称式の中でも特に $A=x+y, B=xy$ が基本的（A, B を使って、どれも書けるから）なことがわかった。そこで、この $x+y$ と xy を“ 基本対称式 ”と呼ぶことにする。

どんな対称式も、必ず基本対称式で書ける

3　発展

これまで、2 文字 x, y の多項式について見てきたが、x,y,z 3 文字や x,y,z,u 4 文字、$\cdots\cdots$ の多項式についてもこれと似たことが言えないか考えてみる。

x, y の基本対称式 $x+y$, xy は何に関係があるかといえば、“ 和と積 ” なので 2 次方程式の解と係数の関係が頭に浮かぶ。

そこで、3 次方程式の解と係数の関係を見てみる。

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a \neq 0)$$

の解を α, β, γ とすると、因数分解して、

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \tag{1}$$

となる。この右辺を展開すると、

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = ax^3 - a(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - a\alpha\beta\gamma$$

(1) で係数比較すると、

$$-a(\alpha+\beta+\gamma)=b$$
$$a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=c$$
$$-a\alpha\beta\gamma=d$$

となる。この両辺を a で割って

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

これが 3 次方程式の解と係数の関係だが、ここに現れた左辺の α,β,γ をどう入れ替えても式が変わらない。例えば、

$$f(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha+\beta+\gamma$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f(\alpha,\gamma,\beta) &= \alpha+\gamma+\beta \\ &= \alpha+\beta+\gamma=f(\alpha,\beta,\gamma) \\ f(\beta,\alpha,\gamma) &= \beta+\alpha+\gamma \\ &= \alpha+\beta+\gamma=f(\alpha,\beta,\gamma) \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

このように、α,β,γ をどう並べ替えても式が変わらないような式を対称式と呼んでみようか、という気になる。そして、2 文字のときの類推から、どんな対称式でも必ず

$$\alpha+\beta+\gamma\ ,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ ,\ \alpha\beta\gamma$$

の式で書けるのではないか（つまり、これら 3 つの式が基本対称式と呼ぶものになっているのではないか）と予想される。

3.1 一般の対称式

x,y,z の多項式で、x,y,z をどのように入れ替えた式を作っても式が変わらないとき、それを対称式という。文字がこれ以上多くても同じように決める。

＜例＞

(1) $x+y+z$　(2) $xy+yz+zx$　(3) xyz

(4) $x^2+y^2+z^2$　(5) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$

これらは、x,y,z をどのように入れ替えても式が変わらないので、3 文字 x,y,z の対称式だ。

＜練習 5 ＞

次のうち対称式であるものはどれか。

(1) $x^3+y^3+z^3$　(2) $x^2-x+y^2-y+z^2-z$

(3) $x-y+z$　(4) $x^2y+y^2z+z^2x$

3.2 基本対称式

$$\begin{cases} x+y+z=A \\ xy+yz+zx=B \\ xyz=C \end{cases}$$

とおく。このとき、3 文字の対称式を A,B,C の式に直すことを練習してみよう。

＜例＞

$$\begin{array}{l} (1)\ x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=A^2-2B \\ (2)\ x^2yz+xy^2z+xyz^2=xyz(x+y+z)=CA \end{array}$$

次の練習に挑んでみて下さい。

＜練習５＞

次の各式が対称式であることを確かめ、それを A,B,C で表せ。

$$(1)\ x^3+y^3+z^3 \quad (2)\ x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2$$

このように、3 文字の対称式も必ず基本的な 3 つの対称式 A,B,C で書けそうだ。この予想は正しい（証明されている）。更に、もっと一般に文字の個数が 3 個以上の場合でも、解と係数の関係に現れる式を基本対称式と呼ぶことにして、必ず対称式が基本対称式で書けることが証明できる。

解　答

＜練習１の答＞ (1),(3),(4),(5).(7)

＜練習２の答＞

$$\begin{array}{ll} (1) & 3(x+y)^2-7xy=3A^2-7B \\ (2) & 2xy(x+y)=2BA \\ (3) & xy(x+y)-(x+y)=BA-A \end{array}$$

＜練習３の答＞

$$f_5(x,y)=x^5+y^5=(x+y)(x^4+y^4)-xy(x^3+y^3)=Af_4(x,y)-Bf_3(x,y)$$
$$f_6(x,y)=x^6+y^6=(x+y)(x^5+y^5)-xy(x^4+y^4)=Af_5(x,y)-Bf_4(x,y)$$

＜練習４の答＞ (1),(2)

＜練習５の答＞

$$\begin{array}{llcl} (1) & x^3+y^3+z^3 & = & (x^3+y^3+z^3-3xyz)+3xyz \\ & & = & (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ & & = & (x+y+z)\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\}+3xyz \\ & & = & A(A^2-3B)+3C \\ (2) & x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 & = & (xy+yz+zx)^2-2(xy^2z+yz^2x+zx^2y) \\ & & = & (xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z) \\ & & = & B^2-2CA \end{array}$$