三角形を正三角形に等積変形する

数学セミナー１９８６年１月号の“エレガントな解答をもとむ”に次のような問題が出された。

【問題】
三角形が与えられたとき、その三角形と面積が等しい正三角形を作図する方法を示せ。

数学研究部の生徒に、こんな問題が雑誌に出されてるけど考えてみるか？　と見せた。見せて少ししたらできたという生徒がいた。
その場にいた生徒のうち２名と私のやりとりを次に。

Ａ君：非常に数学ができる。

Ｂ君：テストの成績は普通より確実に上だが、かなり、という程度ではない。

B： できた！

私： 私：えー、そんな簡単にでけるかぁ。ほんまかあ。

A： 先生、適当に考えて、できたと思っているだけですよ。いつもこいつ適当ですから。

私： まあ、黒板でやってみぃ。

Bは次ページ【命題】横にあるような図を描いて
（但し、図中 A_1, B_1, C_1 は命題の説明に使う点の記号であり、Bが描いたものではない）

B： C を通って辺 AB に平行な直線を引いて、線分 AB の垂直 2 等分線との交点を求めそれを C^1 とする。$\triangle ABC$ と $\triangle ABC^1$ は面積が等しくて、$AC^1 = BC^1$ で 2 等辺三角形になる。今は C を動かして C^1 を作ったけれど、今度は $\triangle ABC^1$ で B を今と同じように動かして B^1 として、できた正三角形 $\triangle AB^1C^1$ は $\triangle ABC$ と面積は変わらず、これで、この問題は解けました。

A： ほら、先生言ったとおりでしょ。適当に考えただけでしょ。お前何言ってんだよ。折角 $A'B = A'C$ になったのに、B を B' に動かしてしまったら、$A'B' \neq A'C$ となるから、$\triangle A'B'C$ は $B'C = B'A'$ の 2 等辺三角形にはなっても、正三角形にはならないだろう。

B： そうかあ・・・。じゃあ、もう一回続けて $\triangle A'B'C'$ を作ればいい。

A： そんなの、もう一回やったって、折角 2 等辺三角形になったところが、もう一回やったときに等しくなくなってしまうだろ。

B： えー、そんなことないですよね、先生、うまくいきますよね。

私： 2 等辺三角形の頂角以外の点を等積変形で動かして正三角形になるような 2 等辺三角形は、どんな 2 等辺三角形か調べてみたらどうや。

A： そのような 2 等辺三角形は正三角形ですね。

私： そうやなあ。しかも、そのときは点を動かさへんなあ。そやから、どっかで正三角形になってくれてて初めてその変形で正三角形になるわけやけど、ということは、正三角形になる前は正三角形になってなアカンわけやから、このやりかたではアカンことになるなあ。

A： ほら、また適当だった。
B： 適当なんかじゃないよ。それじゃあ、何回も続ければいい。何度も続けたらそのうち正三角形になる。
A： 何度続けたって、駄目なものは駄目だろう。

微分方程式の解を関数列の極限として捉えることを勉強したことがあったためだろうと思うが、私はこのときにＢが最後に言ったことを面白いと思った。

Ｂの方法を続ければ、正三角形に近づくんじゃないか？

それで、

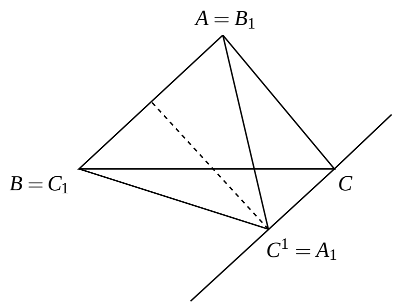
私： “何回も続けたら正三角形に近づいていく”ということを調べてみんのも面白い、やってみよか、
A： この問題の答えにならないですよ。駄目とわかったのに、今更調べて何になるんですか。
B： どうやるかわかりませんが、やってみたいです。

となり、Ｂと一緒に考えることになった。A, Ｂ以外の生徒は、やりとりを見ているだけで、この研究には加わらなかった。

この時のＢとの共同研究を数学セミナーに送ったところ、1987 年 7 月号の NOTE に掲載された。その NOTE の記事は以下のとおりである（便宜上、図や表記等を記事と少し変えてある)。

【命題】

任意の三角形 ABC に対して、一つの辺 AB を定め、他の頂点 C を通って AB に平行な線を引き、AB の垂直二等分線との交点を C^1 とすると、$\triangle ABC^1$ はもとの $\triangle ABC$ と等面積の二等辺三角形である。この三角形を $\triangle A_1B_1C_1$ とし、B_1C_1 をその底辺とする。以後等辺の一つ A_1B_1 を固定して同様の操作を反復すると、得られる三角形の列 $\triangle A_kB_kC_k$ は正三角形に近づく。



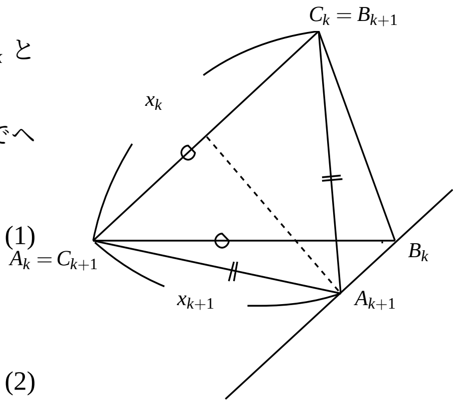
【証明】

二等辺三角形の $\triangle A_kB_kC_k$ の両等辺の交点を A_k、等辺の長さを x_k とし、これらの三角形の（等しい）面積を S とする。
右図でわかるように、$\triangle A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}$ の三辺は x_{k+1}, x_{k+1}, x_k なのでヘロンの公式により

$$(4S)^2 = (2x_{k+1}+x_k)(2x_{k+1}-x_k)x_k^2 \tag{1}$$

だから、これを x_{k+1} について解くと

$$x_{k+1}^2 = \frac{4S^2}{x_k^2} + \frac{x_k^2}{4} \tag{2}$$



である。他方 $\sin A_k = y_k$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
2S &= x_k^2 y_k \\
&= x_{k+1}^2 y_{k+1}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

から、(2) を使って漸化式

$$
y_{k+1} = \frac{4y_k}{4y_k^2+1} \tag{4}
$$

を得る。(4) の不動点 $y_k = y_{k+1}$ は 0 , $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ だが、$y_k > 0$ なので、$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は捨ててよい。また 0 は反発的、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ は吸引的な不動点なので、$y_k \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が予想される。そうなれば、$\angle A_k \to 60^\circ$ *or* 120° だが、$\dfrac{y_k}{y_{k+1}} \to 1$ なら (3) から $\dfrac{x_k}{x_{k+1}} \to 1$ となるので、$\triangle A_k B_k C_k$ は正三角形に近づく。

以下、$y_k \to \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を証明する。(4) から、

$$
y_{k+1} - y_k = \frac{y_k(3-y_k^2)}{4y_k^2+1} \tag{5}
$$

$$
y_{k+1} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{(2y_k-\sqrt{3})(6y_k-\sqrt{3})}{2(4y_k^2+1)} \tag{6}
$$

が計算できる。分母はともに正だから、

$$
\begin{cases}
y_k \lesseqgtr \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{に対して} \quad y_{k+1} \gtreqless y_k \\
\dfrac{\sqrt{3}}{6} < y_k < \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \text{なら} \quad y_{k+1} > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\
\dfrac{\sqrt{3}}{2} < y_k \leqq 1 & \text{なら} \quad y_{k+1} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}
\end{cases}
$$

がわかる。ところが、

$$
y_{k+1} - \frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{4y_k^2 - 8\sqrt{3}y_k + 1}{2(4y_k^2+1)} \tag{7}
$$

である。この分子の 0 点間の区間は $\left[\dfrac{(2\sqrt{3}-\sqrt{11})}{2}\ ,\ \dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{11})}{2}\right]$ だが、これは $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 1\right]$ を完全に内部に含むので、$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < y_k \leqq 1$ のとき (7) の右辺 > 0 、したがって $y_{k+1} > \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ となる。

ところで、つねに $y_k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ ということはありえない。もしもそうなら (5) によって $\{y_k\}$ は単調増加し、上に有界だから、ある極限値 $\bar{y}$ に収束するが、$\bar{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ なので、いつかは $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ より大きくなるからである。

したがってあるところから先は、$\{y_k\}$ は交互に区間 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\ ,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ と $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ 1\right]$ の中に入る。さて、1 つおきの値を比較すると、

$$
y_{k+2} - y_k = -\frac{y_k(4y_k^2+5)(4y_k^2-3)}{(4y_k^2+1)^2 + 64y_k^2} \tag{8}
$$

なので、$y_k < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なら増加：$y_{k+2} > y_k$、$y_k > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なら減少：$y_{k+2} < y_k$ である。ゆえにあるところから先の $\{y_k\}$ を一つおきにとると $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より小さい単調増加列と、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より大きい単調減少列になるから、両者はそれぞれ極限値 $\underline{y}$, $\overline{y}$ に収束する。(4) から $\underline{y}$, $\overline{y}$ の連立方程式を得るが、一方を消去すると (8) の分子 $= 0$ に相当する方程式になり、区間 $(0,1]$ にある解として $\underline{y} = \overline{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を得る。

けっきょく両者は共通の極限値に収束するので、列 $\{y_k\}$ 自体も同じ極限値に収束することになり、証明できた。