数学談話室

《どちらが正しい？》

今回は、レポートの宿題について皆が考えたことに関わって話します。

レポート問題

『$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{2}$ のとき、$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。』という問題を、A 君、B 君は以下に示すように解いたら、答えが違って出た。このことについて各自、自分の思うところを述べよ。

《A 君の解答》

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore\quad \frac{9}{4}=1+2\sin\theta\cos\theta$$
$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{5}{8}$$

《B 君の解答》

$$\begin{aligned}&\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)^2\\&=\sin^2\theta+\cos^2\theta-(\sin\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}\\&=1-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\&=0\end{aligned}$$

平方の和が 0 なので、$\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ である。

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$$

授業中に話した通り、どちらが“合っている・間違っている”という話だけでなく、この問題を題材にして問題を深く考えたり、更に発展させていったりして欲しい、というのが私の希望でした。皆の考えてくれたことの主なものを書いていきます。

① B 君の解法で、その 1 行目の式をどうやって見つけるのか?

② B 君の解法は非常に凝ったものだ。わざわざそんなことを思い付かなくても、普通に A 君の方法で何故解こうとしないのか?

③ $\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ ならば、

$$\sin\theta+\cos\theta\neq\frac{3}{2}$$

なので、B 君の解法は間違っている。

④ $\sin\theta=\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たすような θ は存在しないので、B 君は間違っている。

⑤ B 君の解法の 1 行目の式で、

$$(\sin\theta-1)^2+(\cos\theta-1)^2$$

を考えても、これはやはり 0 になり、$\sin\theta=\cos\theta=1$ が得られ、$\sin\theta,\cos\theta$ が一つに決まらないので、この B 君の方法は良くないことがわかる。

⑥ B 君は実数の 2 乗の和と言っているが、$\sin\theta,\cos\theta$ は実際に連立方程式として

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{2}\ ,\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

を解いてみると、

$$\sin\theta = \frac{3\pm i}{4}\ ,\cos\theta = \frac{3\mp i}{4}$$

で、実数ではないので、B 君が安易に“ 実数 ”の 2 乗と思ったところに誤りがある。

⑦　$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$ で、最大値が $\sqrt{2}$ であるから、$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{2}\ (>\sqrt{2})$ となる θ は存在しない。つまり、この問題自身がおかしい。

以上です。結果として、⑦を見てくれるとわかるように、A 君も B 君も答えがない問題を答えがあるものとして解こうとしたところに、二人の誤りがあったわけです。『こういう問題はこうやれば解ける』式の丸暗記だけで、問題を解いていくことの恐ろしさを分かってもらうこと、がこのレポート問題の宿題の一つの目的です。ここで“ 一つ ”と言ったのは、この問題の不備を指摘しただけで終わらず、

(1)　ではどうすればいいか

(2)　この問題が解けなくなっている原因が $\sin\theta+\cos\theta$ の値域以外の観点から究明することができないのか。

ということなど、いろいろ考えてもらうこともこの宿題の目的でした。

皆が問題集などで勉強していると、ややもすると《問題が与えられて解く。問題が与えられて解く。・・・・・・》の繰り返しのみで、解き方のパターンを覚えこんで機械的に手をかしているだけのことが多くなり、人間が機械同然になってしまいかねない。**人間は、一つのことを覚えたら、それを発展させたり、それに不備が無いかどうか調べて、あるようであればその不備を除こうと努力する。また、覚えたものよりもっと便利なもの、もっと良いものが無いかと探す。そして、覚えていることが増えてくると、それらの間に何か関係が無いか調べる。覚えている一つ一つの事柄の特徴を調べて、この場合にはこちら・あの場合にあれを使うと良い、などという使い分けの目安（分類）を作る。・・・・・・。**人間の歴史を見てみると、このようにして発展してきたように思う。科学の発展も全く同じだと思う。そして、科学の歴史を振り返ると、**『ある問題の解決を目指して歩みを進めた場合、すぐに解決することばかりではない（むしろ、すぐに解決する方が稀)。何百年たって解決する場合も多々ある。その間、その問題に取り組もうとした幾多の科学者が、問題の解決には至らないまでも、“ この問題に関してこんなことが分かった。あのことと関係ありそうだと思う。・・・・・・ ”ということを調べていって解決に一歩一歩近づいていく』**というのが常です。今回のレポートにも、“ こんなことが分かった、こうだと予想される、・・・・・・ ”等、いろいろ考えたり、予想したりしたレポートがあり、皆が科学的な目や心を持っているのに接して、非常に頼もしく思いました。

さて、①〜⑦以外で少数意見ですが、なかなか鋭い目を持っていると私が思った意見を紹介します。

【1】 $\left(\sin\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2}\right)^2$ の $\dfrac{1}{2}$ を どうやって B 君は見つけたのだろうか? 、という意見がいくつか見られたが、それに対する解答に相当する意見がいくつかあった。⑤とも関係がある。それは別にすごいことをやるわけではない。授業でもよく言っているように、自分がこういう式が成り立てばいいなと思ったらそのまま書いてみる! 。それを実行するのです。つまり、

$$(\sin\theta-\alpha)^2+(\cos\theta-\alpha)^2=0$$

となる α があればいいな! 。この左辺を計算すると、

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\alpha(\sin\theta+\cos\theta)+2\alpha^2\\&=2\alpha^2-3\alpha+1\end{aligned}$$

よって、$\alpha=1\,,\ \dfrac{1}{2}$ が求めるもの。

これに関連して、この方法の失敗は、$\sin\theta$, $\cos\theta$ が独立にいろいろ値をとるわけではないところにある、と見た意見がいくつかあった。

【2】

『B 君は 2 乗すると 0 以上になるなるという実数の性質を使っているが、この問題では虚数なのでおかしい。解法としては A 君が正しい。』という意見が見られました。それに対する解答にあたるものが数人の意見の中にありました。どんな意見かというと、『$\sin\theta$,$\cos\theta$ が虚数になる。そんな θ はない。ということは、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ という式が成り立つかどうかということもナンセンスである。だから、A 君も B 君と同罪である。』というもの。このレポート問題は数年前にも出したことがありますが、そのときにはこの意見を述べた人はいませんでした。私自身この意見に接して、『その通り、その通り、・・・・・・』とうなづきました(述べられてみると当然のことなのだけれど、かつての私は“ A 君の解法は正しい ”という意見に対して“ 問題がおかしい ”ということしかプリントで伝えなかった。それが、今回のプリントでは、この意見を述べてくれた数人のおかげで、もっと適切な内容があったことに気付きました。)。

次の意見は上の意見より更に本当に小数です。これは、数年前の時にもあった意見でした。

【3】

『私の知っている $\sin\theta$,$\cos\theta$ は実数の値しかとらないが、虚数の値をとる $\sin\theta$,$\cos\theta$ を考えられないか? 』という意見です。

この意見には傾聴すべきところがあります。例えば、$x^2+2x+3=0$ を満たす数 x を求めようとしたとき、皆が中学生の時だったら、

$$x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$$

なので、『これを満たす数はない』と答えることになる。また事実、1600 年ぐらいまでは、そのように考えていた。ところが、2 乗すると -1 になる数を考え、複素数というものを考

えると、いろいろな事柄がうまく処理できることが分かり、数学者は実数より広く数を拡張して複素数というものを考えることにした。このように、今までの自分たちの考えの範囲が狭く不便であれば、今までの考えの本質的に大切なところは保存しながら意味を拡大したりして、自分たちの都合のよいように（便利なように）考えの範囲を広げてきた歴史が数学にはある（神様がその広げ方を教えてくれたわけでなく、どこかに転がっていたわけでもなく、数学者がどうすればその拡張に自然さがあり、しかも自分たちに便利かを、何人もが何年もかかって一つ一つ作りあげて今日に至っている）。

このような拡張については皆はすでにもう一つ知っている。それは、指数で、皆は a^n というのは a を n 回かけたもの、と始め習った。しかし、n を自然数だけに限らず 0 や負の整数の場合にもうまく考えると、m,n が自然数の時に成り立ち、しかも非常に便利な

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \tag{1}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \tag{2}$$

という法則（公式）が、m,n が 0 や負の整数の場合にも成り立つばかりでなく、自然数でしか考えていない時には、

$$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n \text{ のとき }) \\ 1 & (m = n \text{ のとき }) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n \text{ のとき }) \end{cases}$$

と三つも場合分けして書かないと一般の計算結果が書けなかったのに、0 や負の整数をも含んだ整数の場合に拡張して考えると、場合分けの必要がなくなって

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \tag{3}$$

でいつの場合でも計算できることになり便利になったのが、皆が 1 年生の時。

この後、いろいろ拡張し、n が有理数（つまり、整数割る整数と書ける数）の時にも a^n を考えた。$n = \dfrac{q}{p}$ のとき、 p 乗すると a^q になる数のことだとして a^n を決めたのだった。どんなことを考えてこのように決めたかというと、(1)〜(3) が有理数の時にも成り立つように決めたい、ということであった。そしてそうするには、必然的に上のように決めざるを得なかったわけでした。

さて、いよいよこの【3】の意見に対して関連する数学事項を述べます。

『$\sin\theta$, $\cos\theta$ を実数としか考えないところに非常に制約があってやりづらいので、なんとか複素数一般にまで話が広げられないか・・・・・・』ということについて話をします。θ が実数の時には $\sin\theta$, $\cos\theta$ は実数値をとるので、$\sin\theta$, $\cos\theta$ が虚数の値をもとるようにしようと思うと必然的に、θ が虚数の場合を考えることになる。では、虚数の値を持つ角度とは何かというと、これは角度の意味を成さなくなるので、いままでのような $\sin\theta$, $\cos\theta$ の決め方（定義の仕方）ではだめだということになります。

ではどう決めるか? **自分たち人間の都合が良いように決めれば良い**! 次のように決めると、いろいろうまく話が運ぶし、実数の場合のある意味での自然な拡張になっているので、歴史的にはそのように数学者は決めて現在に至っています。では概略を紹介しましょう。厳密に話をしだすと『複素関数論』という大学の理工系 2 年生頃に学ぶ話になっていきます。

《$\sin\theta$, $\cos\theta$ の一般的定義の概略》

次の記号を使うと便利なので、それを先ず紹介しておきましょう。“ ! ” を “ 階乗 ” と言い、

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

のように、n から 1 までの全ての自然数をかけたものを $n!$ と書くことにします。例えば、$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ 。

ここで、次の規則的に並んだ θ の式の列を考えます。

$$\theta\ ,\ -\frac{\theta^3}{3!}\ ,\ \frac{\theta^5}{5!}\ ,\ -\frac{\theta^7}{7!}\ ,\ \frac{\theta^9}{9!}\ ,\ -\frac{\theta^{11}}{11!}\ ,\cdots \tag{4}$$

どういう規則で並んでいるかはわかると思います。実はこの θ に $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ を代入して、(4) の並んでいる数を左側から順にどんどんたしていくと、次第次第に $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の値に近づいていくのです。更に、$\dfrac{\pi}{3}$ でなくても、θ に実数を代入して同じようにどんどんたしていくと、θ がどんな実数であっても、$\sin\theta$ の値にどんどん近づいていくことが証明されるのです（証明はここではしない)。つまり、θ が実数なら、(4) の数をどんどんたしていった場合に次第にある一つの実数に近づいていくのですが、それを $\sin\theta$ だと決めて良いわけです（$\sin\theta$ の定義として良い)。さて、そこで θ が虚数の場合にも (4) に代入してどんどんたしていくことが出来るので、どんどんたしていってみて、もしある複素数に次第に近づいていくというようなことがわかれば、その近づいて行く先の複素数を $\sin\theta$ と決めれば良いのでは・・・・・・、ということになる。実際には、$\sin\theta$ がどんな虚数でも (4) をどんどんたしていくと、ある複素数に近づいていくことが証明出来るので、当初の目的が果たせたことになる。

ついでに、$\cos\theta$ については、

$$1\ ,\ -\frac{\theta^2}{2!}\ ,\ \frac{\theta^4}{4!}\ ,\ -\frac{\theta^6}{6!}\ ,\ \frac{\theta^8}{8!}\ ,\ -\frac{\theta^{10}}{10!}\ ,\cdots$$

という規則的に並んだものを使えば良いことがわかっている。

このようにして、θ が複素数の時にも、$\sin\theta$, $\cos\theta$ が決められ、更にその同じ決め方で、θ が実数の時には今まで我々が使ってきた $\sin\theta$, $\cos\theta$ の値と同じ値が得られるという、自然な拡張がなされたことになる。

最後に、今回の課題の中に潜む問題点や A 君、B 君の解法についての特色あるレポートいくつかの紹介を次にします。

3 組の◎◎さんのレポートについて

どういう時に A の解法が可能か、どういう時に B の解法が可能かを調べてみよう、というところが特色あるところだと思います。そういう問題を自分で見つけてそれについて考えてみようとしたところにすごく科学的な目を私は感じました。誰かに『どういう時にこの二人の解法はそれぞれ可能か? 』という問題を出されてから考えたわけではないところ。

5 組の△△君のレポートについて

$x-y$ 平面内の単位円周上の点の座標として、$(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$ をとらえているからいろんな制約が出てきてうまくいかないわけで、うまく空間で意味をつけたらいいかもしれない、という意見。

上で見た通り、△△君の意見とは違った形で数学は進んだが、その歴史の流れの中ではいろんな意見が出され、そのいろんなアイデアが検討され今に至っているのだと思う。こんなのはどうか、というアイデアが出せるのも大切な科学の力だと思います。

9 組の□□君のレポートについて

二人が得た答えが違う理由の根本的な原因を探ろうとしている姿がうかがえます。また、文章から問題点を分析する力があるという感じを受けました。分析力というのも科学では大切だと思います。

また後ろに付けて紹介はしませんでしたが、つぎのような凄いことを知っているレポートもありました。

5 組の☆☆君のレポートについて

高校では取り扱わない

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

というオイラーの公式というのを用いてのレポートでした。この式の左辺が皆はなんのことか分からないでしょうが、説明するとかなり長くなるのでやめますが、大学ではそういうのもやるのかなと思っていて下さい。