作図不可能問題に関わる話題の紹介

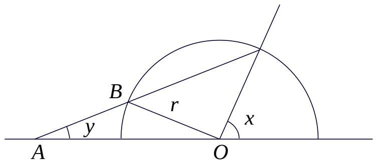
【動機と目的】

R. クーラント・H. ロビンズ共著の有名な本『数学とは何か（原題 *What is Mathematics？* ）』に、ギリシャ三大作図問題に関して、作図不可能の話題がある。よくある誤解（**定規とコンパスのみを使って与えられた任意の角を三等分することは不可能である**）を解くことを先ずの目標として、ここに書かれていることを簡約紹介する。

課外読み物や、発展的学習の参考になればありがたい。

アルキメデスは次のことを示している。

【アルキメデス (*Archimedes*) の角の *3* 等分法】



右図に示すように、任意の角 x が与えられているとする。この角の基線を左に延長し、O を中心として半径 r（r の大きさはいくらでもよい）の半円を描く。定規の縁に 2 点 A,B を $AB=r$ となるように記す。点 B が半円上にあるように定規を動かし、A が角 x の基線の延長上にあり、定規の縁は角 x の端辺と O を中心とする半円との交点上に来るようにする。定規をこの位置に置いたまま直線を引き、もとの角 x の基線の延長とのなす角を y とする。このとき、

$$y=\frac{x}{3} \tag{1}$$

であり、求める角の 3 等分ができたことになる（証明は簡単なので省略する）。

1　基本的な作図

1.1　体と平方根の作図

どのような作図問題も次のような型をしている。理解を深めるキーポイントは“ 幾何の言葉から代数の言葉への翻訳 ”にある。線分を例に書いてみる。

- ある線分の集合、$a,b,c,\cdots$ を与えて、他の一つ以上の線分 $x,y,\cdots$ を求めること。
- 求める量と与えられた量の間の関係式（方程式）を見つける。
- 方程式を解いて未知量を見つける。
- この解が定規とコンパスによる作図に対応する手法で求められるかの決定。

ここで、長さ a 及び b の二つの線分が与えられたとき、和、差、積、商、有理数倍：$a+b$, $a-b$, ab , a/b , ra（但し、r は任意の有理数）が初等的な作図に対応していることを見ておく。

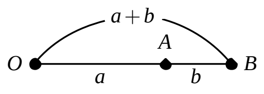


図 1

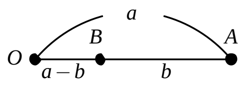


図 2

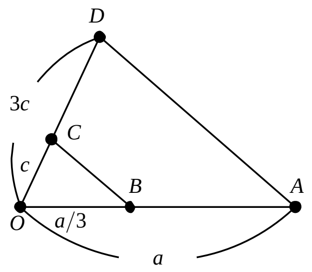


図 3

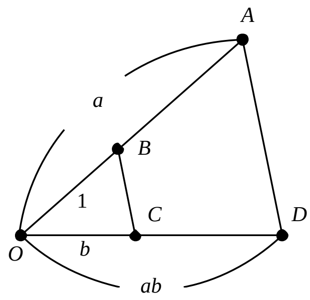


図 4

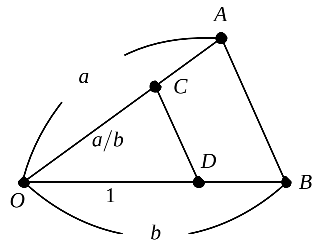


図 5

【$a+b$】　**図 *1* 参照**

直線を引いて、その上にコンパスで距離 $OA=a$ 及び $AB=b$ を区切って記すと、$OB=a+b$ となる。

【$a-b$】　**図 *2* 参照**

上記と同様に $OA=a$ 及び $AB=b$ を区切って記すが、AB を OA とは反対方向に取ると、$OB=a-b$ となる。

【 ra 】　**図 *3* 参照**

具体的に例えば $3a$ を作図するには、単に $a+a+a$ と加えればよい。同様にして、p が任意の整数のとき、pa が作図できる。$a/3$ の作図は次のように工夫する。

直線上に $OA=a$ を区切って記し、$OD=3c$ を作図する。A と D を結び、C を通って AD に平行な直線を引き、OA との交点を B とする。三角形の相似から、$OB=a/3$ を得る。同じようにして、q が任意の整数のとき、a/q を作図することができる。この操作を線分 pa に施すことで、$r=p/q$ を任意の有理数として、ra を作図することができる。

【 ab 】　**図 *4* 参照**

ある角 O の 2 辺上にそれぞれ $OC=b, OA=a$ を区切って記し、OA 上に $OB=1$ を区切って記す。A を通って BC に平行な直線を引き OC との交点を D とする。この OD の長さが ab である。

【 a/b 】　**図 *5* 参照**

ある角 O の 2 辺上にそれぞれ $OB=b, OA=a$ を区切って記し、OB 上に $OD=1$ を区切って記す。D を通って AB に平行な直線を引き OA との交点を C とする。この OC の長さが a/b である。

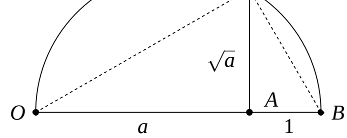
以上のことから、

【命題】**有理的代数演算：既知量の和、差、積、商は、作図可能である。**

【定義】与えられた実数 $a, b, c, \cdots$ から重複を許して有限個を取り出し、それらに有理的代数演算を施して得られる数の集合を、$a, b, c, \cdots$ により生成された数体と言う。

上で見た数体からはみ出る決定的な数の作図は、平方根の作図である。

線分 a が与えられたとき、$\sqrt{a}$ は作図可能である（右図）。直線上に $OA=a, AB=1$ を区切って記す。線分 OB を直径とする円を描き、A を通り OB に垂線を引いて、円との交点を C とする。このとき、AC の長さが $\sqrt{a}$ である。



2　作図可能な数と数体

2.1　一般理論

ここで、定規とコンパスの使い方に関して確認をしておく。いわゆる、ユークリッドの原論において、定規とコンパスは次のような使い方だけを認めている。

定　　規	異なる 2 点を結ぶ線分及び直線を描く
コンパス	与えられた点を中として与えられた長さを半径に持つ円を描く

これ以外の使い方は認められていない。上に紹介したアルキメデスの角の三等分法では、定規の縁に点を描いているが、これはユークリッド流の作図では認めていないものである。つまり、ユークリッド流の制限をしなければ、どんな角も三等分できるというのは矛盾でも何でもない。

岩波講座　応用数学　全 14 巻（43 分冊）中に、基礎として、「いろいろな幾何 *I*」が一松信氏の執筆で発行された（発行日：1993 年 11 月 8 日)。この本の中に次のようなことが書かれている。

> **・・・不幸にして現在でもなお「作図不能」の意味を正しく理解しない、いわゆる「角の *3* 等分屋」が跡を絶たないのが残念である。**

定規とコンパスによる作図は、次の手順を有限回行ったものである。

1)	異なる 2 点を結ぶ直線を引く。
2)	2 直線の交点を求める。
3)	ある点を中とする与えられた半径の円を描く。
4)	ある円と他の円または直線との交点を求める。

ここまでの確認をして、有名な ギリシャの三大作図問題 がどのような問題だったかを確認しておく。

《 ギリシャの三大作図問題 》

【角の三等分問題】

与えられた角を三等分すること

【デロスの問題（倍積問題)】

1 辺の長さが 1 の立方体の 2 倍の体積を持つ立方体を作ること

【円積問題】

半径が 1 の円と同じ面積の正方形を作ること

以上 3 つの問題はギリシャ時代から考え続けられ、2000 年以上も未解決であり続けたが、解析幾何学が編み出され、代数学との関係が付けられて本質が姿を現し、作図不可能であるという解決に至った有名な問題である。

このレポートでは、作図という操作が代数的にどう表現されるかを以下に紹介し、最初の 2 つの問題が作図不可能であることの証明を紹介する。

ある要素（点、直線あるいは円）は、最初に与えられているか、それ以前の段階で作図されているとき、既知であると考える。

時には、不定の要素が現れるときがある。例えば「線分の垂直 2 等分線を引くときに、線分の両端各点から、等しいが不定の半径を持つ 2 つの円を描き、それらの交点を結ぶ」などのように。

ここで、作図全体を座標 (x,y) に関連させて考える。与えられた要素は $x-y$ 平面上の点、あるいは線分、直線、円で表される。ただ一つの線分だけが最初に与えられているときには、この線分を $(1,0)$ という点を定める単位長として取ってよい。また、不定の要素の場合には、不定点 (x,y) などは x,y を有理数として選んでおけばよいし、不定直線 $ax+by+c=0$ は、係数 a,b,c を有理数として、不定円は座標が有理数である点を中心として有理数が半径となる円を取ることにしておく（もし、このように限定することで結果に影響が生じるなら、それは不定要素の資格がないはずである）。

しばらくの間、ただ一つの要素 単位長 1 だけがはじめに与えられているものとする。このとき、基本的作図で見たことから、1 から和・差・積・商の有理操作で得られる全ての数（それは有理数全体になる）が定規とコンパスで作図可能となることがわかる。

【練習問題１】　0 以外の数を要素に持つ数体は少なくとも有理数全体を含むことを示せ。

この練習問題は、線分が一つ与えられれば、それを基にして、有理点（x 座標、y 座標がともに有理数である点）が全て作図可能であることがわかったことになる。

次に、無理数、例えば $\sqrt{2}$ を前に見たように定規とコンパスで作図して求めると、そのあと有理的な作図により

$$F_1 = \left\{ a+b\sqrt{2} \ \middle|\ a,b \text{ は有理数} \right\} \tag{2}$$

という形の数全てが作図可能であることがわかる。さらに、(2) の形の数全てから、有理的操作によって得られる (2) の形以外の数はない：つまり、(2) の形全体の集合は数体であり、有理的操作では新しい数は生まれないことがわかる。

【練習問題２】　$p=1+\sqrt{2}$, $q=2-\sqrt{2}$, $r=-3+\sqrt{2}$ のとき、次の数を、(2) の形に表せ。

$$\frac{p}{q}\ ,\ p+p^2\ ,\ \frac{pqr}{1+r^2}$$

【練習問題３】　(2) が数体であることを示せ。

ここで、有理数全体の集合である有理数体を F_0 とし、今得た (2) の形全体の数体を F_1 とする。このとき、

$$F_0 \subsetneqq F_1 \subsetneqq \mathbb{R} \quad (\ \mathbb{R} \text{ は実数全体を示す}\ )$$

である。F_1 を F_0 の拡大体と呼ぶ。

更に作図の範囲を広げていこう。F_1 の数を 1 つ選ぶ（ $1+\sqrt{2}$ を選んだとし、$k=1+\sqrt{2}$ とおく ）。このとき、$\sqrt{a}$ の作図法から、

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} \quad (=\sqrt{k}\ )$$

が作図可能となる。また、この数を用いて

$$F_2 = \left\{ \, p + q\sqrt{k} \ \middle|\ p, q \in F_1 \, \right\} \tag{3}$$

という形の全ての数からなる数体が得られる（実際に数体になること、つまり四則演算について閉じていることを確認のこと）。

【練習問題４】 $(\sqrt{k})^3$, $\dfrac{1+(\sqrt{k})^2}{1+\sqrt{k}}$ を (3) の形に表せ。

【練習問題５】 $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin F_1$ であることを示せ。

ここまで、初めに唯一の線分が与えられたという状況設定で話を進めてきた。では、2 本の線分が与えられた場合はどうかを考えてみよう。この場合、2 本のうちの片方を単位長に選ぶことができる。残りをこの単位で測って α であったとする。このとき、

$$\frac{a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0}{b_n\alpha^n + b_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + b_1\alpha + b_0} \quad (\text{各 } a_i, b_j \text{は全て有理数})$$

の形をした全ての数からなる数体 G が得られる。

さらに一般化する。ある数体 F の数が作図できるとする。定規だけでは体 F から外へは出られないことを次に示す。

$a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$ とし、2 点 (a_1, b_1) , (a_2, b_2) を通る直線を考える。これは、

$$(b_1 - b_2)x + (a_2 - a_1)y + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

であり、この係数は F の要素である。さらに、F の要素を係数に持つ 2 直線

$$\alpha x + \beta y - \gamma = 0 \ , \ \alpha' x + \beta' y - \gamma' = 0$$

があるとき、それらの交点の座標は

$$x = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'} \ , \ y = \frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

であり、これらはまた F の要素である。よって、定規だけでは F の要素以外を生み出すことはない。

F 以外の要素を生み出すことができるのは、コンパスを使って初めて可能となる。$k \in F$, $\sqrt{k} \notin F$ であるような k があったとする。ここで、

$$F' = \left\{ \, a + b\sqrt{k} \ \middle|\ a, b \in F \, \right\}$$

を考える。このとき、$F \subset F'$ であり、F' も数体になる。F' を F の拡大体、F を F' の部分体という。

作図可能な数から成る数体 F があり、$k \in F$ のとき、F から出発して定規を使用しコンパスを 1 回だけ使用することで、$\sqrt{k}$ を作図でき、

$$\left\{ \, a + b\sqrt{k} \ \middle|\ a, b \in F \, \right\}$$

であるどんな数も作図可能になることがわかった。

逆に、コンパスを 1 回使うだけではこの形の数しか生まれないことを示そう。コンパスでできるのは、点を直線と円あるいは 2 円の交点として求めることである。中心が (ξ,η) で半径が r の円は

$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0 \quad (\ \alpha=-\xi\ ,\ \beta=-\eta\ ,\ \gamma=\xi^2+\eta^2-r^2\ ) \tag{4}$$

であり、$\xi,\eta,r\in F$ なら α,β,γ も F の要素である。また、既に見たように F の要素を座標に持つ直線は

$$ax+by+c=0 \quad (\ a,b,c\in F\ ) \tag{5}$$

と表される。連立方程式 (4),(5) から y を消去すると、

$$Ax^2+Bx+C=0 \quad (\ A=a^2+b^2\ ,\ B=2(ac+b^2\alpha-ab\beta)\ ,\ C=c^2-2bc\beta+b^2\gamma\ )$$

となる。明らかに $A,B,C\in F$ である。そして、この円と直線の交点の x 座標の値は

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

なので、F の要素 p,q,k を用いて、$p+q\sqrt{k}$ と書けている。交点の y 座標についても同様である。

さらに、2 円

$$x^2+y^2+2\alpha x+2\beta y+\gamma=0 \tag{6}$$
$$x^2+y^2+2\alpha' x+2\beta' y+\gamma'=0 \tag{7}$$

のときは、(6) − (7) より、

$$2(\alpha-\alpha')x+2(\beta-\beta')y+(\gamma-\gamma')=0$$

が得られるが、これを (6) と連立させて先ほどと同様に解ける。

円と直線の交点、円と円の交点のいずれにしても、作図により新たな 1 点または 2 点の座標は $p+q\sqrt{k}$ の形をしている。

【作図可能な数】

始めに与えられた任意の量により定まる体 F_0 から出発する（例えば、単位長として選ばれる唯一の線分が与えられたときは、有理数体を F_0 として出発する)。

次に、$k_0\in F_0$, $\sqrt{k_0}\notin F_0$ である k_0 を選び、$\sqrt{k_0}$ を添加して作図可能な数から成る拡大体 F_1 を作る。

$$F_1=\{\ a_0+b_0\sqrt{k_0}\ \mid\ a_0,b_0\in F_0\ \}$$

ここで、さらに $k_1\in F_1$, $\sqrt{k_1}\notin F_1$ である k_1 を選び、$\sqrt{k_1}$ を添加して作図可能な数から成る拡大体 F_2 を作る。この手順を繰り返すと、平方根を n 回添加した数体 F_n に達する。

作図可能な数はそのような拡大体の列により到達されるような数のことであり、またそれらに限る（必要とされる拡大の回数 n の大きさは重要ではない。それは、問題の複雑さの度合いを示しているのに過ぎないと見る)。

【三大作図問題の作図不能性】

いよいよ、本プリントのメインの話をしよう。3 次方程式に関しての次の定理が活躍する。

【定理】

有理数係数の 3 次方程式が有理数の解を持たなければ、その解はいずれも有理数体 F_0 から出発したのでは作図できない。

(証明)

a,b,c を有理数として、方程式

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{8}$$

を満たす解 x について考える。

背理法により示す。x が作図可能であるとする。このとき、拡大体の列 $F_0,F_1,\cdots,F_k$ で、$x\notin F_{k-1}$, $x\in F_k$ であるようなものが存在する（ $k>0$ ）。方程式 (8) の作図可能な解は複数個ある可能性がある。今決めた、k はその解に伴い異なる可能性がある。このような k のうち最小のものを新たに k とおき直しても混乱は生じないので、このように決めることにする。

次のような 3 つの数 p,q,ω が存在する。

$$x=p+q\sqrt{\omega}\quad (\ p,q,\omega\in F_{k-1}\ ;\ \sqrt{\omega}\notin F_{k-1}\ ;\ q\neq 0\ )$$

これを (8) に代入して整理すると、

$$P+Q\sqrt{\omega}=0\quad (\ P=p^3+3pq^2\omega+ap^2+aq^2\omega+bp+c\ ,\ Q=3p^2q+q^3\omega+2apq+bq\ ) \tag{9}$$

$a,p,q,\omega\in F_{k-1}$ なので、$P,Q\in F_{k-1}$ である。ここで、$Q\neq 0$ とすると、(9) より $\sqrt{\omega}=-\dfrac{P}{Q}$ となるが、左辺は F_{k-1} の要素ではないのに、右辺は F_{k-1} の要素であるので矛盾する。よって、$Q=0$ であることがわかる。これを (9) に代入して、さらに $P=0$ であることもわかる。

$$\therefore\ P=Q=0 \tag{10}$$

これを用いると、$p-q\sqrt{\omega}$ も (8) の解になることがわかる。なぜなら、$y=p-q\sqrt{\omega}$ とおいて (8) に代入すると

$$y^3+ay^2+by+c=P-Q\sqrt{\omega}=0\quad (\because\ (10))$$

となるから。

(8) の解が $p\pm q\sqrt{\omega}$ と 2 つあることになる（$q=0$ なら 2 つではないが、$q=0$ にはならないことが背理法で次のようにわかる。$q=0$ のときは $x=p$ となり、x が F_{k-1} の要素になってしまうから）。(8) の残りの解を α とすると、解と係数の関係から、

$$\alpha=-a-(p+q\omega)-(p-q\omega)=-a-2p\in F_{k-1}$$

となる。すると、α は作図可能な (8) の解となり、k の最小性に反することになるため、矛盾が示された。

よって、定理は証明された。（証明終わり）

【注】 この定理から、作図したい要素の値が満たす方程式が 3 次の有理数係数の方程式で、しかも有理数解を持たなければ、その要素は作図不可能といえることになる。

今示した【注】を実際に使う場合に役立つよく知られた次の補題を確認しておく。

【補題】

整数係数の方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

が有理数の解 $x = \dfrac{q}{p}$ （但し、p と q は互いに素 ）をもつとき、p は a_0 の約数であり、q は a_n の約数である。

（証明）

$x = \dfrac{q}{p}$ を方程式に代入し、分母を払うと

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0$$

これを変形して次のような 2 つの式を得る。

$$a_0q^n = p(-a_1q^{n-1} - \cdots - a_{n-1}p^{n-2}q - a_np^{n-1}) \tag{11}$$

$$a_np^n = q(-a_0q^{n-1} - a_1pq^{n-2} - \cdots - a_{n-1}p^{n-1}) \tag{12}$$

(11) から、a_0q^n は p の倍数であり、p と q は互いに素なので、p は a_0 の約数である。同様にして、(12) から q は a_n の約数である。（証明終わり）

【倍積問題】

この作図が不可能であることは、次のように簡単にわかる。

与えられた立方体の 1 辺の長さが単位長さであるとして、作図したい立方体の 1 辺の長さを x とすると、

$$x^3 = 2 \quad \therefore x^3 - 2 = 0$$

であり、有理数係数の 3 次方程式である。この方程式が有理数の解を持たなければ、上の【注】で述べたように、この問題は作図不能であることがわかる。そして、補題で見たように、上の方程式が有理数の解を持つとすると、それは $x = \pm 1$, ± 2 以外にはないが、これらがどれも方程式を満たさないことはすぐわかる。よって、方程式は有理数解を持たず、作図不能であることがわかった。

【角の三等分】

角の三等分の作図は次のように代数化できる。角 θ が $\cos\theta = g$ により与えられる、と考える。こう考えれば、この問題は $x = \cos\dfrac{\theta}{3}$ を見つける問題と同値になる。三倍角の公式から

$$4\cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) = \cos\theta$$

$$\therefore 4x^3 - 3x - g = 0 \tag{13}$$

である。

さて、「どんな角も三等分できる」ことを否定するには、「三等分できない角がある」ことを示せばよい。$\theta = 60^\circ$ がそれである、つまり $g = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ のとき、(13) が有理数の解を持たないことを示せばよい。(13) に $g = \dfrac{1}{2}$ を代入して分母を払って整理すると、

$$8x^3 - 6x - 1 = 0$$

を得る。ここで、$z = 2x$ とおくと、(13) は

$$z^3 - 3z - 1 = 0 \tag{14}$$

となり、(13) が有理数の解を持たないことと、(14) が有理数の解を持たないこととは同値である。

(14) が有理数の解を持たないことを示そう。(14) が有理数の解 $z = \dfrac{r}{s}$ (r と s は互いに素な整数) を持ったとする。(14) に代入し、分母を払って整理すると、

$$s^3 = r(r^2 - 3s^2)$$

右辺から、s^3 は r の倍数であることになる。r と s は互いに素なので、$r = \pm 1$ がわかる。また、$r^3 = s^2(s + 3r)$ とも整理できるので、同様に考えて $s = \pm 1$ がわかる。

よって、方程式 (14) が有理数の解を持つとすると、その解は $z = 1$ か $z = -1$ 以外にない。ところが、実際に (14) に $z = \pm 1$ を代入しても成立しないことがすぐわかる。

よって、(14) は有理数の解を持たない。つまり、60° は作図できないことが示された。（証明終わり）

円積問題が残っているが、この問題は倍積問題・角の三等分問題に比べて遙かに知られている証明は厄介である。π が代数的数ではない（どんな整数係数の多項式の方程式の解にはなり得ない)、つまり超越数であることを示され、作図不可能であることがわかり解決した。

教材開発としては、【練習問題５】は『 数学とは何か 』(R. クーラント・H. ロビンズ著) には無かった問題である。4 ページの【練習問題３】と【練習問題４】間に記載したように、単に $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \sqrt{k}$ をコンパスで作図すると、F_1 から F_2 に拡大できる、と書いてあるだけである。$\sqrt{1+\sqrt{2}} \in F_1$ であれば、本質的に拡大しないために、【練習問題５】を調べてみたくなった。このように数学的に意義のあるものを詳しく読むことで教材が得られるという例として見て頂ければ幸いである。

この問題への私なりの解答を次に示す。

【問題５】の解答

背理法で示す。$\sqrt{1+\sqrt{2}} \in F_1$ であるとすると、

$$\sqrt{1+\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2} \tag{15}$$

となる F_0 の数 a, b があることになる。(15) の両辺を 2 乗すると

$$1 + \sqrt{2} = (a^2 + 2b^2) + 2ab\sqrt{2}$$

ここで、a^2+2b^2 と $2ab$ はともに F_0 の数になるから、

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2+2b^2 & = & 1 \\ 2ab & = & 1 \end{array}\right. \tag{16}$$

よって、

$$\begin{aligned}(a-b\sqrt{2})^2 &= (a^2+2b^2)-2ab\sqrt{2} \\ &= 1-\sqrt{2} \quad (\because (16)) \\ &< 0\end{aligned}$$

である。しかし、左辺は実数の 2 乗なので、負になることはないので矛盾である。よって、$\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin F_1$ が示された。

この解答は、普通は、連立方程式 (16) を実際に解こうとして、

$$a^2 = \frac{1 \pm i}{2}\ , b^2 = \frac{1 \mp i}{2}$$

を得た段階で、a, b が F_0 の数ではない、つまり有理数ではないことに気付くことになると思うが、この解答のように $a+b\sqrt{2}$ の共役 $a-b\sqrt{2}$ を調べると綺麗な証明が得られることも生徒に伝えられる。

例えば、問題を少し作り替えて、

【練習問題６】 $\sqrt{2+\sqrt{2}} \notin F_1$ であることを示せ。

とすると、また違った雰囲気になる。

$$\sqrt{2+\sqrt{2}} = a+b\sqrt{2}$$

から、

$$a^2+2b^2 = 2\ ,\ 2ab = 1$$

となり、これから、

$$a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}\ , b^2 = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{2}$$

が得られる。そして、2 乗して無理数になるような有理数がないことを利用して、証明することになる。

共役を使うと、先ほどと同様に考えて、

$$a-b\sqrt{2} = \sqrt{2-\sqrt{2}}\ or\ -\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

がわかり、

$$a^2-2b^2 = (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = \sqrt{2}\ or\ -\sqrt{2}$$

となる。これは、左辺が有理数なのに、右辺が無理数であり矛盾する。

このように、いろいろな問題が生まれてくる可能性を含んでいる。さらにまた、教科書、参考書、問題集に $a+b\sqrt{2}$ の形をした数に関わる問題を見かけるが、今回の作図不能問題の理解に欠かせないもであることを教員が理解しておくのは、生徒に説明し解かせている問題が数学的な大切な事項と繋がりがあることを自信を持って教えることができるという点で、授業等での教師の自信と迫力に差が出るのではないかと思っている。

最後に、数学セミナーという数学の月刊雑誌に、今回話題にしたギリシャの三大作図問題の簡単に紹介する記事がある。このプリントで紹介したことの更にエッセンス部分が書かれている。

数学セミナー 2008 年 10 月号　教師のためのやさしい数学の話
連載第９回　『早く来すぎたナポレオン』　福井大学教育地域科学部　黒木哲徳　氏　著