近似解を求める *Lagrange* ラグラジュの方法

数学セミナーの連載に　組み合わせ論逍遙　という記事が昨年４月号から続いている。その６月号に（連載第３回目）の　「カタラン数（その２）」　に、ラグランジュの反転公式というものが登場した。そしてその記事の末尾に、著者の山田裕史（岡山大学大学院自然科学研究科）先生は次のようなことを書いていらっしゃった。

> 今回の原稿を準備していて、ラグランジュという名前に敏感になった。
>
> B.C.Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, AMS , 2006
>
> をパラパラ見ていて、またラグランジュの定理を見つけた。任意の自然数は平方数（$\geqq 0$）の 4 つの和で書ける、というものだ。・・・

この記載を見て私は、数学辞典や家にある数学書の巻末索引等でラグランジュと名の付くものを片端から探してみたくなった（私には飽きっぽいがコレクション癖がある）。それで見つけたのが今回紹介する「方程式の近似解を求めるラグランジュの方法」で、家に買っておいた

> 岩波講座　応用数学　［基礎７］　基礎代数　山崎圭次郎　著

の 72 ページに記載があったものである。

【ラグランジュ法（方程式の解）】

代数方程式の解の近似値を求めるラグランジュ法について紹介する。ラグランジュの方法が如何に自然な発想（言われてみたら、ひょっとしたら自分もそのようなことを考えたことがあるかも知れない、と思うくらい当たり前の方法）であるかを見ておきたい。

【実数の連分数表示】

実数 x を連分数で表示する方法を考えてみる。ガウス記号 $[\quad]$ を使う。つまり、実数 y に対して、$[y]$ は y を超えない最大の整数を表すとする。$a_0=[x]$ とおく。a_0 は整数であり、$a_0 \leqq x < a_0+1$ を満たす。また、$y_0 = x - a_0$ とおくと、$x = a_0 + y_0$ $(0 \leqq y_0 < 1)$ である。 ここで、$y_0 \neq 0$ のとき、$x_1 = \dfrac{1}{y_0}$ とおくと、$x = a_0 + \dfrac{1}{x_1}$ $(x_1 > 1)$ となる。$a_1 = [x_1]$, $y_1 = x_1 - a_1$, とおく。ここで、$y_1 \neq 0$ のとき、$x_2 = \dfrac{1}{y_1}$ とおくと、$x = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{x_2}}$ となる $(x_2 > 1)$ 。 これを続けることで連分数が得られる（但し、$y_k = 0$ となった段階、つまり x_k が整数になった段階でこの手続きは中断する）。

【方程式の近似解を連分数で求める】

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

とする。また、c_0 は整数で、半開区間 $[c_0, c_0+1)$ に方程式 $f(x)=0$ の実数解があるとする。
次の手順（アルゴリズム）で得られる値 C の列を $c_1, c_2, \cdots$ とする。

《ステップ 1》	$C=c_0$ とし、$F(x)=f(x)$ とする。
《ステップ 2》	$F(C)=0$ なら手順を終了し、ステップを抜け出す。
《ステップ 3》	$x^nF(C+\dfrac{1}{x})$ を新たに $F(x)$ と置き直す。
《ステップ 4》	$F(x)=0$ が区間 $[C, C+1)$ に解を持つ正の整数 C を出力する。
《ステップ 5》	ステップ 2 へ行く。
（注）	ステップ 3 で最高次係数が負なら -1 倍したものを $F(x)$ と置き直してよい。

実際の例でこのステップを見ておこう。$f(x)=x^2-2$ として実際に c_0, c_1, c_2 までを出してみよう。$f(x)=0$ の解として $\sqrt{2}$ を考えよう。$1 \leqq \sqrt{2} < 2$ なので、$c_0=1$ とする。

《ステップ 1》 $C=1$, $F(x)=x^2-2$
《ステップ 2》 $F(1)\neq 0$ なので終了しないで次のステップ 3 へ。
《ステップ 3》 $x^2\{(1+\dfrac{1}{x})^2-2\}=-x^2+2x+1 \quad \therefore \quad F(x)=x^2-2x-1$
《ステップ 4》 $F(x)=0$ は区間 $[2,3)$ に解を持つので、$C=2$ である。よって、この C を出力、つまり $c_1=2$ とする。
《ステップ 5》 ステップ 2 へ行く。
《ステップ 2》 $F(2)=-2^2+2\times 2+1\neq 0$ なので終了しないで次のステップ 3 へ。
《ステップ 3》 $x^2\{(2+\dfrac{1}{x})^2-2(2+\dfrac{1}{x})-1\}=x^2-2x-1 \quad \therefore \quad F(x)=x^2-2x-1$
《ステップ 4》 $F(x)=0$ は区間 $[2,3)$ に解を持つので、$C=2$ である。よって、この C を出力、つまり $c_2=2$ とする。
《ステップ 5》 ステップ 2 へ行く。
$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

となる。これを続けて $c_0, c_1, c_2, \ldots$ が得られる。＜例終わり＞

ここで、再び一般の場合に話しを戻す。

$$x_n = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \cdots \ddots \cfrac{1}{c_n +}}}} \tag{2}$$

とおく。このとき、上記ステップが有限回でストップするなら、その最後のステップで得られた x_n は $f(x)=0$ の有理数解となる。有限回で終わらないなら、x_n は収束しその極限は $f(x)=0$ の無理数解となっている。そして、x_n がその無理数解の近似値を与えている。

先ほどの例でいえば、

$$
\begin{align}
x_0 &= 1 \tag{3}\\
x_1 &= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \tag{4}\\
x_2 &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4 \tag{5}\\
x_3 &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1.41\dot{6} \tag{6}\\
x_4 &= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1.41379\cdots \tag{7}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{8}
\end{align}
$$

である。収束の速度は余りよくないが、連分数の発想としては、ラグランジュでなく自分が気が付いていても不思議ではないくらいに自然な考えだ。

ところで、上のステップで作った $F(x)$ だが、2 度目のステップで $F(x)$ を求め終わったとき、$F(x)$ はずっと同じ式になることがわかる。

よって、$\sqrt{2}$ の連分数による近似では、2 がずっと続くことがわかる。

【練習問題】

$\sqrt{3}$ について、連分数で近似せよ。

【後日談】一つの問題からの数学の広がりと深まり

一般の方程式（多項式の）の解の近似を生徒と考えたとき、次のような質問が生徒から出てくれば、楽しいと思う（出てきて欲しいが、欲張りか? ）。

① $f(x)=0$ の実数解が半開区間 $[c, c+1)$ に 2 つ以上あるときはどうしたらよいのか。

② $f(x)=0$ の実数解が半開区間 $[c, c+1)$ に存在するような整数 c をどのように見つければよいのか。

③ コンピュータを利用するとして、上記①,②を遂行するプログラム作成はどうすればよいのか（可能か）。

① については、そのそれぞれについてステップを続ければ、実数解の個数分の連分数が得られることになる、という当然の帰結の話しをすることになる。

② については、歴史的に有名な方程式の解の分離に関する **スツルムの問題** の話しをしてやることで、深みのある古典代数学の話しをしてやれる。

③ については、単純に考えると、解の上限が知りたくなるだろうか。上記②で記したスツルムの方法で、n に具体的な数値を考えて区間 $[n, n+1)$ に解がいくつあるかを判定するアルゴリズムができる。だから、単純にはこの n に 1 から順に自然数を入れて調べていけばいいことになるが、この n の上限をプログラムとしては予め設定しておきたいと思う。では、この上限はわかるのか。

このことについて、やはり古典代数学の解の上限の話しを生徒にしてやることができる。

次に、今紹介したスツルムの問題と解の上限に関する定理を証明抜きで紹介しておく。

【スツルム (*Sturm*) の定理】

方程式 $f(x)=0$ が区間 $a<x\leqq b$ に持つ実数解の個数を N_0 とする（但し、重解の場合まとめて 1 つと数えることにする）。ここで、$f(x)$ と $f'(x)$ からユークリッドの互助法により得られる剰余の関数列を符号を替えて得られたものを $f_k(x)$ とする。つまり、

$$f_0(x)=f(x)\ ,\ f_1(x)=f'(x)$$
$$f_{k-1}(x)=q_k(x)f_k(x)-f_{k+1}(x)\quad (k=1,2,\cdots,\ell-1)$$

とする（$f_{k-1}(x)$ を $f_k(x)$ で割ったときの余りに -1 をかけたものが $f_{k+1}(x)$ である）。この関数列

$$f(x)\ ,\ f'(x)\ ,\ f_2(x)\ ,\ \cdots\ ,\ f_\ell(x) \tag{9}$$

において、区間の両端 $x=a$ 及び $x=b$ に対する符号の変わりの数を $V(a)$ 及び $V(b)$ とする。このとき、

$$N_0=V(a)-V(b)$$

が成り立つ。

但し、区間の一端 $x=a$ が $f(x)=0$ の k 重解であるときは、(9) の各関数を共通の因数 $(x-a)^{k-1}$ で割った上で $V(a)$ を求めることとする。$x=b$ に関しても同様。

【 *Fourier* の定理 】

実数係数の多項式 $f(x)$ が区間 $a<x\leqq b$ において持つ実数解の個数を N とする。$f(x)$ 及びその導関数

$$f(x)\ ,\ f'(x)\ ,\ f''(x)\ ,\ \cdots\ ,\ f^{(n)}(x)$$

における符号の変わりの数を V とすると、

$$N=V(a)-V(b)-2h\quad (\ 2h\ \text{は 0 または正の偶数}\ )$$

が成り立つ。

【 *Descartes* の符号律 】

実数係数の多項式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

の係数列 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ の符号の変わりの数（0 になるものは飛ばして数える）を W とすると、$f(x)$ の正の解の個数は W またはそれよりも偶数個少ない。

【 *Laguerre* の定理 】

実数係数の方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

が区間 $0<x<r$ において持つ解の個数は

$$a_0\ ,\ a_0+a_1r\ ,\ a_0+a_1r+a_2r^2\ ,\ \cdots\ ,\ a_0+a_1r+\cdots+a_nr^n$$

の間の符号の変わりの数に等しいか、それよりも偶数個だけ少ない（ 但し、$r>0$, $f(r)\neq 0$)。

【 解の限界 】一連の事実

幾つかを以下に紹介して終わる。いずれも、共立出版　高木貞治　著　「代数学講義」　に紹介されているものから選んだ。

解の限界 すべての解が絶対値において r を越えないとき、r を解の限界という。

＜1＞ 方程式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0 \tag{10}$$

の解の一つの限界が

$$r^n-|a_1|r^{n-1}-|a_2|r^{n-2}-\cdots-|a_n|=0$$

のただ一つの正の解により与えられる。

＜2＞ 方程式 (10) において、係数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ の最大絶対値を M とすると、$1+M$ が解の限界である。

＜3＞ 方程式 (10) において、

$$Max(n|a_1|,\sqrt{n|a_2|},\sqrt[3]{n|a_3|},\cdots,\sqrt[n]{n|a_n|})$$

が解の限界である。

＜4＞ （掛谷の定理）

実数係数の方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

において、$a_0>a_1>a_2>\cdots>a_n>0$ ならば、解の絶対値は 1 よりも小さい。