$\boxed{解}$ $\boxed{と}$ $\boxed{係}$ $\boxed{数}$ $\boxed{の}$ $\boxed{関}$ $\boxed{係}$

1　解と係数の関係

2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

の解を α,β とすると、

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

が成り立つ。また、3 次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

の解を α,β,γ とすると、

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

が成り立つ。4 次以上の方程式についても同様の関係があることが示される。

2　特徴と威力

特徴は、個々の解がどうのこうの言うのではなく、解の全体を見ているということ。

威力は、実際に解がいくらであるかわからなくても（解が求まらなくても)、解の基本対称式の値はわかるということ。基本対称式の値がわかるから、全ての対称式の値がわかることになる。

解と係数の関係

特徴	威力
個々の解ではなく 全体の解を見ている	解が求められなくても 解の対称式の値は全てわかる

2 次方程式については、皆は解の公式を知っているので、個々の解がいくらかわかり、解と係数の関係の威力をそれ程すばらしく思わないかも知れないが、3 次方程式となると、ありがたみが出

てくる。例えば、 $x^3-x-1=0$ という 3 次方程式を考える。この解を皆は求められるだろうか。難しいと思う。ところが、この方程式の解を α,β,γ とすると、

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1\\ \alpha\beta\gamma=1\end{cases}$$

ということがわかる。これから、

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\\&=0^2-2\times(-1)\\&=2\end{aligned}$$

という具合に対称式の値が求められる。

【練習】

(1) 3 次方程式 $2x^3+4x^2+3x+1=0$ の解を α,β,γ とするとき、次の式の値を求めよ。

① $\alpha+\beta+\gamma$ ② $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ ③ $\alpha\beta\gamma$

④ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ⑤ $\alpha^2\beta\gamma+\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2$

(2) 3 次方程式 $x^3-3x^2+2x+1=0$ の解を α,β,γ とするとき、次の式の値を求めよ。

① $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ ② $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(3) 4 次方程式の解と係数の関係を自分で求めなさい。つまり、

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

の解を $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ とするとき、次の式を a,b,c,d,e で表せ。

(A) $\alpha+\beta+\gamma+\delta$

(B) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta$

(C) $\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta$

(D) $\alpha\beta\gamma\delta$

(解答)

(1)

① -1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=1$

(2)

① $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=-2$

② $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$

$=3$

(3)

(A) $-\dfrac{b}{a}$ (B) $\dfrac{c}{a}$ (C) $-\dfrac{d}{a}$ (D) $\dfrac{e}{a}$