出張途次 JR 内で考えた問題作り

イメージの大切さ（幾何学から）

今年、新年早々の出張で 1 月 5 日遠軽から札幌へ向かう JR の中で数学書を読んでいて作った問題を紹介する。読んでいた本は

『曲線　幾何学の小径』　小沢哲也　著（培風館）

であった。第 3 章は曲率がタイトルで、曲線の縮閉線と曲率に関わり、直線族の焦点と包絡線について書いてある所を読んでいた。

概略、次のようなことが書いてあった。

方程式

$$(\cos\theta(t))x+(\sin\theta(t))y=r(t) \tag{1}$$

で表される直線を L_t とおく。t を動かして集めて得られる直線族を $\{L_t\}_t$ と書く。この直線族の中の 2 直線 L_t, L_u とその交点について、u を t に近づけたとき、交点が L_t 上でどの点に収束するかを調べる。交点が L_t 上のある点に収束するとき、その点を直線族 $\{L_t\}_t$ の L_t における**焦点**と呼ぶ。

そして、次の補題が書いてあった（式などの表現の仕方はこれからの説明に合わせて変えてある）。

【補題】

$\theta'(t)\neq 0$ のとき、直線族 $\{L_t\}_t$ の 1 本の直線 L_t における焦点は

$$r(t)(\cos\theta(t),\sin\theta(t))+\frac{r'(t)}{\theta'(t)}(-\sin\theta(t),\cos\theta(t))$$

であり、$\theta'(t)=0$ かつ $r'(t)\neq 0$ のとき焦点は無限遠にある。

この後者を見たときに、感覚的に成り立つように感じた。

① (1) は原点中心半径 $r(t)$ の円周上、x 軸の正の向きから角 $\theta(t)$ の方向にある点における円の接線になる。
② $\theta'(t)=0$ ということは、$\theta(t)$ の変化が緩慢ということ。
③ $r'(t)\neq 0$ ということは、$r(t)$ の変化はある程度あるということ。

この①〜③からのイメージは、「平行に近い 2 直線で、原点から直線までの距離について、その距

離の差の変化は直線の傾きの差よりも変化が大」確かに交点は無限遠へ行きそうな気がした。

　本に書かれていた証明が特に難しいというわけはなかったが、このようなイメージを持てることに興味が湧いた。そこで、

【問題１】

　$\theta'(t)=0$ かつ $r'(t)\neq 0$ とする。このとき、L_t と L_s の交点への原点からの距離は、$s\to t$ としたときどのような振る舞いをするか述べ、そのことを証明せよ。

　という問題を考えてみた。考えた理由は、定量的な問いかけばかりが多く、抱くイメージを問われることが余りにも少ないからである。特に、ある程度のレベルの問題に取り組む場合には、その問題からどんなイメージが湧いてくるかが大切なことがある。それを意識して上の問題が思い浮かんだ。

　勿論、このままだと高校生には酷だと思った。そこで、次のようにしてみた。

【問題２】 直線 $L_t:\left(\cos\left(t^2+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)x+\left(\sin\left(t^2+\dfrac{\pi}{3}\right)\right)y=t+1$ について、以下の各問に答えよ。

(1)　L_0 を計算せよ。

(2)　L_t と L_0 が平行になるときの t の値を求めよ。

(3)　L_t と L_0 が平行ではないときの交点を求めよ。

(4)　(3) で求めた交点は、$t\to 0$ のとき、原点から距離についてどのようになるか答えよ。

　これなら、高校 3 年生の問題になるのではないか。

　実際に (3) 以下を解いてみると、

【(3)(4) の解答】

$$\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & \sin\dfrac{\pi}{3} \\ \cos(t^2+\dfrac{\pi}{3}) & \sin(t^2+\dfrac{\pi}{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

である。

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\pi}{3} & \sin\dfrac{\pi}{3} \\ \cos(t^2+\dfrac{\pi}{3}) & \sin(t^2+\dfrac{\pi}{3}) \end{vmatrix} &= \sin(t^2+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}-\cos(t^2+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \sin\ t^2\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\ t^2} \begin{pmatrix} \sin(t^2+\dfrac{\pi}{3}) & -\sin\dfrac{\pi}{3} \\ -\cos(t^2+\dfrac{\pi}{3}) & \cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin\ t^2} \begin{pmatrix} \sin(t^2+\dfrac{\pi}{3}) & -(t+1)\sin\dfrac{\pi}{3} \\ -\cos(t^2+\dfrac{\pi}{3}) & (t+1)\cos\dfrac{\pi}{3} \end{pmatrix}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} & x^2+y^2 \\ &= \frac{1}{\sin\ t^2}\left[\left\{\sin(t^2+\frac{\pi}{3})-(t+1)\sin\frac{\pi}{3}\right\}^2+\left\{-\cos(t^2+\frac{\pi}{3})+(t+1)\cos\frac{\pi}{3}\right\}^2\right] \\ &= \frac{1}{\sin\ t^2}\left[1+(t+1)^2-2(t+1)\left\{\cos(t^2+\frac{\pi}{3})\cos\frac{\pi}{3}+\sin(t^2+\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{\sin\ t^2}\left\{t^2+2(t+1)(1-\cos t^2)\right\} \\ &= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2}{\sin\ t^2}\right)^2+2(t+1)\frac{1}{1+\cos\ t^2} \end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{\sin\ t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin\ t^2}{t^2}}=1$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2}{\sin\ t^2}\right)^2+2(t+1)\frac{1}{1+\cos\ t^2}\right\}=\infty$$

よって、原点から交点までの距離 $\sqrt{x^2+y^2}$ は無限大に発散するので、交点は原点から限りなく離れていくことがわかる。