数 学 談 話 室

Fibonacci 数列と母関数

1 序

フィボナッチ数列というのは、漸化式

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{cases} \tag{1}$$

によって決まる数列で、この一般項は隣接三項間の漸化式の解法手順を実行すれば

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

と求められる。今回のプリントではこの a_n を別の方法で求めてみる。その方法というのは母関数と言われるものを利用する方法です。

2 母関数

一般に、数列 $\{a_n\}$ に対して、無限級数

$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} + \cdots$$

を、$\{a_n\}$ の母関数（ *generating function* ）と言う。

3 *Fibonacci* 数列に応用

(1) で決まるフィボナッチ数列の母関数を y とおくと

$$y = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} + \cdots \tag{2}$$

（この無限級数が収束するかどうか、という問題には触れないで進むことにする。でも気になる人のために『 $|x| < \dfrac{1}{2}$ なら収束することが確かめられる』とだけ言っておこう）。(2) の両辺に x をかけると

$$xy = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots \tag{3}$$

(2) + (3) より

$$\begin{aligned}
(1+x)y &= a_1 + (a_1+a_2)x + (a_2+a_3)x^2 + \cdots + (a_{n-1}+a_n)x^{n-1} + \cdots \\
&= a_2 + a_3x + a_4x^2 + \cdots + a_{n+1}x^{n-1} + \ldots \quad (\because (1)) \\
&= \frac{1}{x}(a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} + \cdots) \quad (\text{但し、} x \neq 0) \\
&= \frac{1}{x}(y-1) \ (\because (1)) \\
\therefore\ (1+x)y &= \frac{1}{x}(y-1)
\end{aligned}$$

これから y を求めると

$$y = \frac{1}{1-x-x^2} \tag{4}$$

ここで、$1-x-x^2 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$ となるように α , β を決めよう。

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases} \tag{5}$$

だから、α , β は

$$t^2 - t - 1 = 0 \tag{6}$$

の 2 つの解である。(4) は

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} \\
&= \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right)\frac{1}{x}
\end{aligned}$$

ところで、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\alpha x} &= 1 + \alpha x + \alpha^2x^2 + \cdots \\
\frac{1}{1-\beta x} &= 1 + \beta x + \beta^2x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

だから、

$$y = \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{(\alpha-\beta) + (\alpha^2-\beta^2)x + \cdots + (\alpha^n-\beta^n)x^{n-1} + \cdots\right\}$$

(2) と係数比較して

$$a_n = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^n - \beta^n)$$

ところで、(6) を解いて

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\
\therefore \quad a_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}
\end{aligned}$$