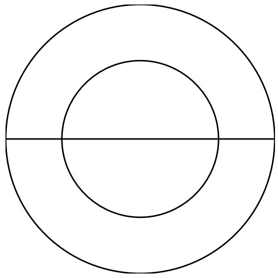
数 学 談 話 室

円の面積について

将来、三角関数の積分を利用して円の面積を簡単に計算することになるが、ここではもっと原始的に円を取り扱ってみることにする。

1　π について



どの円も全て相似であることにまず注意する。なぜなら、二つの円を中心をそろえて書いてみると、片方を拡大したものが他方の円になっていることがわかるから（右図参照）。

右図で、小さい方の円を O_1 とし、直径の長さを d_1、円周の長さを ℓ_1 とする。また、大きい方の円を O_2 とし、直径の長さを d_2、円周の長さを ℓ_2 とする。O_1 と O_2 は相似だから、対応する部分の長さの比は一定である。このことを、特に直径と円周についてみると、

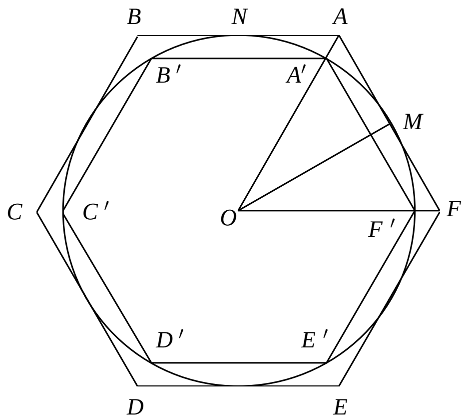
$$\begin{aligned} d_1 : d_2 &= \ell_1 : \ell_2 \\ \therefore\quad d_2\ell_1 &= d_1\ell_2 \\ \therefore\quad \frac{\ell_1}{d_1} &= \frac{\ell_2}{d_2} \end{aligned}$$

つまり、どんな円でも、（円周）÷（直径）の値が同じでることがわかる。この値を今仮に π と書いておくことにする。（π は今定義したばかりだから、π の値がいくらかなどまだ全然わからない。ただ、（円周）÷（直径）の値が π だということがわかっているだけである。）この値を円周率と呼んでいる。

2　π の値について

π の正確な値についてはむつかしいので、ここではおおよそどれぐらいかを調べてみよう。おおよそどれぐらいかすらわからなければ数として扱う場合に実感が伴わないので。

小学校などでは、糸を使って、糸を円にまいてその糸の長さを測って直径の約 3 倍であるから、円周率は約 3 だとしている。ここではそのようなあいまいな方法ではなくもう少しきっちりした方法で調べてみよう。



右図は半径 1 の円 O に、正六角形 $ABCDEF$ と $A'B'C'D'E'F'$ が各々外接及び内接している図で、点 M,N は、円 O との接点である。

内接正六角形 A'〜F' の周の長さを先ず求めよう。$\triangle A'OF'$ は正三角形で円 O の半径の長さは 1 だから、内接正六角形 A'〜F' の一辺 $A'F'$ の長さも 1。よって、内接正六角形の周の長さは 6。次に外接正六角形 A〜F の周の長さを求めよう。$\angle AOM = 30^\circ$，$\angle OMA = 90^\circ$，$OM = 1$ だから、$AM = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$、よって、外接正六角形の一辺の長さは $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ で、周の長さは $4\sqrt{3}$ である。

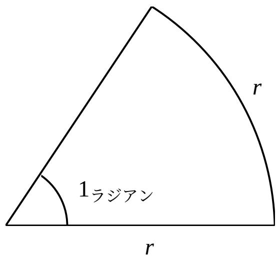
ところで、内接六角形の一辺 $\overline{A'F'}$ と、円弧の一部 $\widehat{A'F'}$ を比べると、$\overline{A'F'} < \widehat{A'F'}$ であるし、また円弧の一部の $\widehat{MN}$ と外接正六角形の一部 $\overline{MN}+\overline{NA}$ を比べると、$\widehat{MN} < \overline{MA}+\overline{NA}$ であるから、

$$
\begin{array}{ccccc}
(\text{内接正六角形の周}) & < & \text{円周} & < & (\text{外接正六角形の周}) \\
\therefore\ 6 & < & 2\pi & < & 4\sqrt{3} \\
\therefore\ 3 & < & \pi & < & 2\sqrt{3} \fallingdotseq 3.46\cdots
\end{array}
$$

つまり、π は 3 と 3.47 の間の数であることがわかる。

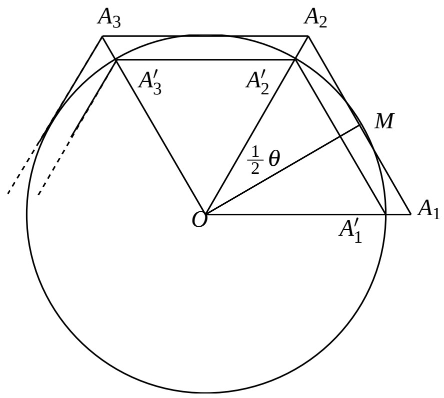
3　ラジアンについて

半径の長さと円弧の長さが等しい扇形の中心角を $1_{(\text{ラジアン})}$ として角の大きさを測る方法を弧度法と言った。これと今までの度で測ったときの角の大きさとの対応を見よう。半径が r の円周の長さは **1** で見たように $2\pi r$ である。よって、360° は $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi_{(\text{ラジアン})}$ に相当する。



4　円の面積について

右図のように、半径 r の円に正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ と $A_1'A_2'\cdots A_n'$ が各々外接及び内接しているとする。この辺の数 n を大きくして行くと、正 n 角形の面積は円の面積に近づいて行くだろうという考えで次のようにやっていく。



①　内接正 n 角形の面積を n を用いて表す（それを $S_n{}'$ とする）。

②　外接正 n 角形の面積を n を用いて表す（それを S_n とする）。

③　$S_n{}' <$ 円の面積 $< S_n$ だから、

$$\lim_{n\to\infty} S_n{}' = \lim_{n\to\infty} S_n$$

ならば、この極限値が円の面積である。

では、上の①〜③を遂行してみよう。

①　$\angle A_1OA_2 = \theta$ とおくと

$$\triangle A_1'OA_2' = \frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

ところで、正 n 角形だから、$n\theta = 2\pi$

$$\therefore\quad \triangle A_1'OA_2' = \frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore\quad S_n{}' = \frac{n}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

②　$\angle A_2OM = \dfrac{\theta}{2}$, $\overline{OM} = r$ だから、

$$OA_2 = \frac{r}{\cos\dfrac{\theta}{2}} = \frac{r}{\cos\dfrac{\pi}{n}}\ (= OA_1)$$

$$\therefore\ \triangle A_1OA_2 = \frac{1}{2}\frac{r^2}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}}\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\therefore\ S_n = \frac{n}{2}\frac{r^2}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}}\sin\frac{2\pi}{n}$$

③　$S_n{}' <$ 円の面積 $< S_n$ だが、ここで $n \to \infty$ としてみよう。

ところで、$x_n = \dfrac{2\pi}{n}$ とおくと、$n \to \infty$ のとき $x_n \to 0$ である。$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ なので、

$$\lim_{n \to \infty} S_n{}' = \lim_{x_n \to 0} \pi r^2 \frac{\sin x_n}{x_n} = \pi r^2$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{x_n \to 0} \pi r^2 \frac{1}{\cos^2 \frac{x_n}{2}} \frac{\sin x_n}{x_n} = \pi r^2$$

以上より、（円の面積）は πr^2 に近づいていく $S_n{}'$ と S_n の間にある数だということになり、それは πr^2 しかない。

$$\therefore \quad \text{円の面積} = \pi r^2$$