数学談話室

倍取りゲーム

1　序

科学の面白さの内の一つは『一見何の関係もなさそうな事柄どうしに、共通点や本質的な類似点・関係を見いだすこと』である。

このプリントの標題『倍取りゲーム』は、かつて授業で皆が遊んだもの。どんなゲームだったかをここで再び書いておこう。“碁石を一握り何個か取り出す。ゲームは二人で行なう。どちらが先攻するか決める。ルールにしたがって（ルールは後で述べる) 碁石を交互に取っていき、最終的に最後の碁石 (一個とは限らない) をとった方が勝ち。”

《ルール》

① 先攻者は第一回目についてのみ全ての碁石を取ることはできない。

② 先攻者の第一回目以後については、両者とも相手が取った石の 2 倍以内の個数の石を取ることができる。つまり、毎回相手が取った石の個数によって自分が取れる石の個数の範囲が変わる。

2　必勝法

倍取りゲームは、最初にある碁石の個数によって先手必勝か後手必勝かが決まっているはずである（先手必勝の場合に、どのように先手がやれば良いかということがわからないにしても)。

このゲームに対して数学者が興味を持つのは次の点である。最初にある碁石の個数を L 個とするとき、

(1) 先手必勝、またはその逆の場合として後手必勝、となる L はどんな数か。

(2) その必勝法はどんなものか、具体的に手引き書が作れるか。

まず、この (1) について 29 までの L を調べると次の表のようになる。

L	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
必勝	後	後	先	後	先	先	後	先	先	先	先	後	先	先

L	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
必勝	先	先	先	先	先	後	先	先	先	先	先	先	先	先

ここで後手必勝の L を書き並べると、

$$2\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 8\ ,\ 13\ ,\ 21\ ,\ \cdots$$

この数列を $\{a_n\}$ とおくと、a_n は次の漸化式を満たす数列のように見える。

$$\begin{cases} a_1 = 2\ ,\ a_2 = 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases} \tag{1}$$

この予想が正しいことを後で見ていくことにするが、(1) のタイプの漸化式で決まる数列をフィボナッチ数列と呼び、昔から有名な数列である。

3　フィボナッチ数列

11 世紀の数学者フィボナッチは、その著書の中に次のような問題を載せいている（1202 年に出された本）。

【問題】

(1)　1 月 1 日、ある囲い地に 1 つがいの兎がいた。

(2)　2 月 1 日に 1 つがいの兎を生んだ。さらに続けて一ヶ月毎に 1 つがいの兎を生んだ。

(3)　子兎は一ヶ月で親兎となり、さらに一ヶ月経つと、1 つがいの兎を生んだ。

さて、次の年の 1 月 1 日には何つがいになるだろうか？

n ヶ月後の親（繁殖能力のある兎）の数を F_{n+1} とすると、

$$\begin{cases} F_0 = 0\ ,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases} \tag{2}$$

が成り立つことが示される（証明略：各自確認のこと）。

約 800 年前に書かれた本の中にあったフィボナッチ数列だが、この数列にはいろんな性質があり、専門誌『 *Fibonacci Quarterly* 』が定期的に刊行されるなど、現在も研究の対象となっている。

フィボナッチ数列の性質を少し紹介する。その前に、今後フィボナッチ数列と言えば、次の漸化式で決まる数列 $\{f_n\}$ のことを言うものとしておく。

$$\begin{cases} f_1 = 1\ ,\ f_2 = 2 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases} \tag{3}$$

(2) で決まる数列の F_2 以降が (3) で決まる数列 $\{f_n\}$ と一致しているし、(3) で決まる数列の f_2 以降が (1) で決まる数列 $\{a_n\}$ と一致している。この $\{f_n\}$ の最初の数個を求めておこう。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

【フィボナッチ数列の性質】

(1)　どんな自然数 d に対しても、d の倍数になっているような f_n がある。

(2)　$\sqrt{f_n}$ が整数となるのは、$f_1 = 1$ と $f_{11} = 144$ のみである。

(3)　どんな自然数 m も、必ず一個または数個の隣り合わないフィボナッチ数列の項の和として表すことができる。

(4)　$n \geqq m+2$ ならば、$f_n > 2f_m$ が成り立つ。

この (1) は、岩波書店『数の世界』: 和田秀男著、に証明がある（また、上に述べたフィボナッチ数列の話もこの本に依った。さらに、(2) についても書かれているが、(2) の証明は長いので省略すると記されている)。

上記性質の (3) と (4) が実は必勝法に関係がある。そのために (3) と (4) が正しいことを簡単に見ていこう。その前に、(3) の意味を確認しておく。例えば、

$$42 = 3+5+34 = f_3 + f_4 + f_8$$

と、42 は確かにフィボナッチ数列の f_3, f_4, f_8 を用いて表されているが、f_3, f_4 のように、第 3 項目、第 4 項目と続いているのは、性質 (3) を満たした表し方とは言えない。しかし、

$$42 = 8+34 = f_5 + f_8$$

とも表せ、これは f が続いた項になっていないから、42 が (3) を満たしてフィボナッチ数列の和に表せたことになる。(3) は数学的帰納法で示せる。$n = k$ のとき正しい、つまり

$$k = f_{m_1} + f_{m_2} + \cdots + f_{m_r}$$

（但し、項が隣り合わないことから、

$m_1 + 2 \leqq m_2$, $m_2 + 2 \leqq m_3$, ... , $m_{r-1} + 2 \leqq m_r$）

と表されているとする。このとき、

$$k+1 = 1 + f_{m_1} + f_{m_2} + \cdots + f_{m_r}$$

であるが、もし $m_1 = 2$ ならば、(3) より、

$$1 + f_{m_1} = f_1 + f_2 = f_3$$

さらにまた、もし $m_2 = 4$ ならば、上と同様に (3) を用いて、項が隣り合わなくなるまでこの操作を続ければよい（厳密には、これも帰納法により保証される、と言うべきかもしれないが)。最後に、$m_1 \geqq 3$ のときであるが、このとき

$$k+1 = f_1 + f_{m_1} + f_{m_2} + \cdots + f_{m_r}$$

はこのままで隣り合っていないから良い。

$n = 1$ のときは明らかなので、性質 (3) が成り立つ。

次に性質 (4) だが、$f_1, f_2 > 0$ かつ (3) より、$f_n > 0$ であるから、

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n > f_{n+1}$$

よって、$f_{n+1} > f_n$ が全ての n について成り立つ。つまり、$\{f_n\}$ は狭義単調増加数列である。これと、再度 $\{f_n\}$ が狭義単調増加であることを使って、

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n > 2f_n$$

より、性質 (4) が成り立つことがわかる。

4　倍取りゲームの必勝法

ここでは、最初の石の数がちょうど f_n 個のときにどうすれば後手が必ず勝てるかを、実例で示す。上で見た性質 (3) , (4) がそこで生きてくるのを見れば、何故後手が必勝かがわかる。言葉で事細かに書くと非常に面倒なので、実例のみにとどめる。性質 (3) を、予め書き出しておくと便利である。

最初の幾つかの数について、フィボナッチ数以外の数を、性質 (3) を満たすように和で表すと

必　勝　表

数	和の表示	和に使用する $f_1, f_2, \ldots$
4	$1+3$	f_1 , f_3
6	$1+5$	f_1 , f_4
7	$2+5$	f_2 , f_4
9	$1+8$	f_1 , f_5
10	$2+8$	f_2 , f_5
11	$3+8$	f_3 , f_5
12	$1+3+8$	f_1 , f_3 , f_5
14	$1+13$	f_1 , f_6
15	$2+13$	f_2 , f_6
16	$3+13$	f_3 , f_6
17	$1+3+13$	f_1 , f_3 , f_6
18	$5+13$	f_4 , f_6
19	$1+5+13$	f_1 , f_4 , f_6

数	和の表示	和に使用する $f_1, f_2, \ldots$
20	$2+5+13$	f_2 , f_4 , f_6
22	$1+21$	f_1 , f_7
23	$2+21$	f_2 , f_7
24	$3+21$	f_3 , f_7
25	$1+3+21$	f_1 , f_3 , f_7
26	$5+21$	f_4 , f_7
27	$1+5+21$	f_1 , f_4 , f_7
28	$2+5+21$	f_2 , f_4 , f_7
29	$8+21$	f_5 , f_7
30	$1+8+21$	f_1 , f_5 , f_7
31	$2+8+21$	f_2 , f_5 , f_7
32	$3+8+21$	f_3 , f_5 , f_7
33	$1+3+8+21$	f_1 , f_3 , f_5 , f_7

最初、石が 34 個あった場合（$34 = f_8$ なので後手が必ず勝つはず)、どのように勝つかを見てみよう。A は先手がとった石の数、B は後手がとる石の数、K は残っている石の数、とする。

$$A = 3\ ,\ K = 31$$

つまり、先手が 3 個の石をとったとする。後手は、31 個の石が残ったのを見て、上の表から数 31

の欄を見つけ、和の表示に使用したフィボナッチ数 $f_1, f_2, \ldots$ の欄を見る。すると、その欄は

$$f_2\ ,\ f_5\ ,\ f_7$$

である。この欄の一番左端にある f_2 個、つまり 2 個の石を後手は取り去る（一番左端のフィボナッチ数 f_2 は、先手が取り去った石の数 3 の 2 倍以下であるから、ゲームのルールにより取り去り可能な石の数である）。

$$B = 2\ ,\ K = 29 \quad / \quad A = 4\ ,\ K = 25$$

必勝表の 25 のところを見ると、$25 = 1 + 3 + 21$。この和で一番小さい 1 を B は取る。

$$B = 1\ , K = 24$$

このように、必勝表で対応する和の一番小さい数の石の個数を取ればよい。

【参考】

上記方法が必勝法になる証明は、『岐阜数学教育研究 2003,Vol.2, 147-163』に 冨倉亮氏と石渡哲哉氏が共著論文として発表されたものに詳しく書かれている。論文タイトルは、“ フィボナッチ数を用いた教材開発とその実践～規則性に着目した理解～ ” であり、アブストラクトに

平成 15 年度の夏休みを利用して、小学校 4,5 年生を対象に行った教材の実践報告

という記載がある。次の URL にその pdf があるので紹介しておきます。

http : // www1.gifu-u.ac.jp / ˜math / gifumathj / 2003-13.pdf