【解答】

【1】　次の各表の式は、元々左辺の式だけがあったのを、左辺を変形して右辺にしたものである。右辺に変形して正しいと認められるものには○を、間違っているものには×を記入して答えよ。（但し、a,b は実数とする）

＜例＞　例えば問題の式が $a = a^2 \times \dfrac{1}{a}$ とする。
このとき $a = 0$ であれば右辺のように変形できないため、
解答欄には “ × ” を記入する。

	式	答
1	$\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	○
4	$\lvert a^2\rvert = a^2$	○
7	$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$	×

	式	答
2	$\lvert -a\rvert = a$	×
5	$\sqrt{a}^{\,2} = a$	○
8	$\log(ab) = \log a + \log b$	×

	式	答
3	$\lvert a\rvert^2 = a^2$	○
6	$\sqrt{a^2} = a$	×
9	$\log a + \log b = \log(ab)$	○

【2】　次の各表の記述の真偽を判定し、真なら○を、偽なら×を、真偽に自信がない場合は△を記入して解答せよ。（但し、分数や割り算があれば、分母や割る数は 0 ではないとする。また、具体的な式で関数を示してある場合は、定義域はその式が意味を持つ一番広い集合を定義域とする。具体的な式で書いていない場合はその限りではなく、一般論として考えること）

	記述	答
1	有理数±有理数＝有理数	○
3	有理数×有理数＝有理数	○
5	有理数÷有理数＝有理数	○
7	有理数×無理数＝無理数	×

	記述	答
2	無理数±無理数＝無理数	×
4	無理数×無理数＝無理数	×
6	無理数÷無理数＝無理数	×
8	無理数÷有理数＝無理数	○

	記述	答
9	数列 $\{a_n\}$ の各項は全て有理数であり、極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つなら、α は有理数。	×
10	数列 $\{a_n\}$ の各項は全て無理数であり、極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を持つなら、α は無理数。	×
11	$y = \dfrac{1}{x}$ は連続関数である。	○
12	$f'(x) = 0$ であれば、関数 $f(x)$ は定数関数である。	×
13	どんな大きさの角も、定規とコンパスで 3 等分できる。	○
14	5 次方程式の解の公式はない。	△

【説　明】

○には簡単な証明を、×には反例を示しておく。

【1】 1. 0 から a までの距離と 0 から $-a$ までの距離は等しいから。

2. 反例：$a=-1$ のとき、左辺 $=|-a|=1$, 右辺 $=a=-1$。

3. a、$-a$ どちらも 2 乗すると a^2 と等しい。

4. $a^2 \geqq 0$ なので。

5. $\sqrt{a}$ は 2 乗すると a になる数なので。

6. 反例：$a=-1$ のとき、左辺 $=|-a|=1$, 右辺 $=a=-1$。

7. 反例：$a=b=-1$ のとき、左辺 $=1$ ，右辺 $=i^2=-1$。

8. 反例：$a=b=-1$ のとき、左辺 $=\log 1=0$ ，右辺の対数は真数が負になり意味をなさなくなっている。

9. 教科書等の公式の証明を参照。前の 8. との違いは、左辺の式があったということは、$a>0, b>0$ であることは大前提である、ということ。

【2】 1,3,5 番について、分母分子が整数の分数どうしの加減乗除は分母分子が整数の分数で明らかに正しい。

1. $\dfrac{n}{m} \pm \dfrac{n'}{m'} = \dfrac{nm' \pm mn'}{mm'}$

2. $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$

3. $\dfrac{n}{m} \times \dfrac{n'}{m'} = \dfrac{nn'}{mm'}$

4. $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

5. $\dfrac{n}{m} \div \dfrac{n'}{m'} = \dfrac{nm'}{mn'}$

6. $\sqrt{2}\div\sqrt{2}=1$

7. $0\times\sqrt{2}=0$

8. 背理法による。α を無理数、p, q を有理数として、$\alpha \div p = q$ が成り立っているとすると、$p\times q=\alpha$ となり、正しいことを示した上記 3. に矛盾する。

9. $a_n=\sqrt{2}$ を無限小数で表示したときの小数点第 $(n+1)$ 位以下を捨てて得られる小数　とすると、a_n は全て有理数であるが、$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ であり、無理数に収束している。

10. $a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ とすると、a_n は全て無理数であるが、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であり、有理数に収束している。

11. 生徒はグラフが繋がっていないことで不連続関数と思いがち。連続か不連続かは考えている点の近くだけでの判断であり、<u>定義域内</u> の各点で連続であれば、それを連続関数と言っていることに注意させる。

12. 次の関数 $f(x)$ は定数関数ではないが $f'(x)=0$ である。$f(x)=\begin{cases} 1 & (0<x<1) \\ 2 & (2<x<3) \end{cases}$

13. ユークリッドの原論にある定規の使い方の制限（異なる 2 点を通る直線 or 線分を引くためだけに定規を使用する）がなければ、任意の大きさの角を定規とコンパスのみで 3 等分する方法をアルキメデスが既に見つけている。本サイト内の「作図不可能問題に関わる話題の提供」に、アルキメデ

スの方法及びユークリッドの原論にある定規の使い方の制限のもとで3等分できない角があることの証明を紹介がある。

14. 上記同様の状況がある。つまり、根号をとる操作と四則演算を有限回用いる方法では、5次以上の方程式には解の公式は見つけられない。その制限をはずせば可能になる、私自身はその証明を読んでいないので前のページの記号欄は ▽ になる。

　その証明は、

「正２０面体と５次方程式」（シュプリンガー数学クラシックス）

Ｆ．クライン／著　関口次郎／訳　前田博信／訳

にあるそうだ。

【３】（安田の意見）

＜真数条件について＞

絶対に書かなければならないというものではないことに注意したい。方程式を解く方法として大きくタイプは二つある。

【同値変形】

同値変形を繰り返して解を求める。そこで得られた解はすべて元の方程式の解であると保証される方法。

【必要条件】

同値変形にならないことを気にせず、変形を繰り返して解を求める。そこで得られた解は必要条件として出てきたものになるので、それら以外が解にならないことは保証される。そこで、得られた解のうちから元の方程式の解を選び出す（ 元の方程式の解にならないものを捨てる）方法。

この前者の方法を採用しようとするとき、例えばテストの【1】の8番、9番の問題に見たように、

$$\log a + \log b = \log ab$$

の公式を利用しての変形は、右辺から左辺への変形が無条件でできないため同値ではない。同値変形を保証したければ、真数条件を設定しておけばクリアーできる。このことを念頭に置いて、対数の問題では真数条件を書いておくと無難、とよく問題集や参考書には書いてある。ということで、書かなかったから減点であるというのはおかしい、と安田は思っている。

＜ $3^{\log_3 (x-2)^2} = (x-2)^2$ について＞

C君が話しているような説明が書いてある問題集や参考書があった。しかし、何も説明を付けずにこの式を書いたことを説明不足と言のは不可解。なぜなら、$\log_a b$ は方程式 $a^x = b$ の解、というのが $\log_a b$ の定義なので、

$$a^{\log_a b} = b$$

は、説明の必要なく定義そのもの。つまり、$3^{\log_3 (x-2)^2} = (x-2)^2$ は定義から当たり前ということにな

るので、説明不要と安田は思っている。

【参考】 方程式を同値変形で解く方法と、必要条件で解以外が混じるのを気にせず拾い集め、その中から解以外を捨てて欲しい解を求める方法の典型的な問題を次に参考として示しておこう。

問題 次の方程式を解け。

$$\sqrt{x+1} = x-1$$

解答（同値変形の方法）

根号内は 0 以上なので、

$$x \geqq -1 \tag{1}$$

である。また、左辺は 0 以上なので、右辺も 0 でなければならず、

$$x \geqq 1 \tag{2}$$

となる。(1),(2) より、

$$x \geqq 1 \tag{3}$$

である。この (3) のもとでは、方程式の両辺は 0 以上なので、両辺を 2 乗しても方程式は同値である。

$$\begin{aligned} \therefore\ x+1 &= (x-1)^2 \\ &= x^2-2x+1 \\ \therefore\ x^2-3x &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、(3) を満たす (4) の解は $x=3$ であり、これが求める方程式の解である。

解答（必要条件の方法）

方程式の両辺を 2 乗して整理すると、

$$x^2-3x=0$$

これを解いて $x=0,3$ を得る。このうち元の方程式を満たすのは $x=3$ なので、$x=3$ が求める解である。