数学的活動を大切にする

1　【発見やイメージを大切にする】

《あみだくじの問題と帰納法》

あみだくじで、違う場所を選ぶと必ず違う場所に出ることの説明で帰納法のイメージを理解させる。

☆　まず、横棒が１本のとき当たり前なことを確認する。横棒が２本のときは、あみだくじが基本的に４種類（下の図 1～図 4）あることを説明し、確認する（「基本的に」とは、横棒がくっついていない縦棒があればそれを除いたもの、という意味であり、例えば、下の図 5 は図 2 に同一視したというイメージ。特に生徒に図 5 等を示すと本質が見えなくなるかも知れないので、教師側の理解、としておいた方が良いかも知れない)。

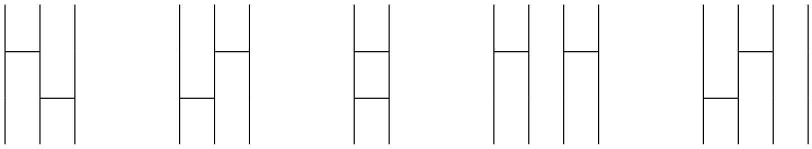


図 1　　図 2　　図 3　　図 4　　図 5

次に横棒が３本になったらどうかを尋ね、生徒の様子を見る。「面倒だ」などという声が出て来てもしめたもの。「じゃ、３本の場合、全部確認しなくてもわかるかな」と聞き返せばよい。

そのような言葉が返ってこなければ、「面倒だよね、次４本の場合どうする。やっぱり全部やってみる。なんかうまい方法ないかな。」と言って少し時間をとっても良いし、この段階で、「今、調べたことを利用できないかな」と言いながら、あみだくじの最下段の横棒を黒板から１本消してみるというヒントを与えても良い。

どちらにするか、また別の方法を採るかは、日頃目の前にしている生徒の実態把握に因る。

《注》　「異なる２カ所から出発して同一出口に至った場合、あみだくじを逆さまにすると、1 カ所から出発して 2 カ所の出口になることになる。そんな変なことはないよ」という生徒がいたら、率直に誉める。決して、自分が今日やろうとしている方法と違うからといって、おざなりな誉め方で終わらないように。「んー、先生が考えたのよりいいな」ぐらい誉めて、「でも、折角先生も考えたから先生が考えたのも紹介したいな」と言って進める。

ついでに、その方法は「背理法という説明の仕方だったね」と復習をしておく。そして、教科通信にでも、その生徒の名前入りで取り上げると良い。

2　【不確定のものを根拠に話すことの怖さ：論理】
【表現力・コミュニケーション能力】

《自然数の最大値は“１”だ！》

　自然数の最大の値を n とする。自然数を 2 つかけても自然数だから n^2 も自然数になる。自然数の中で n が一番大きい数だから、$n \geqq n^2$ である。これを満たす n は、2 次不等式を解いて、$0 \leqq n \leqq 1$ 。これを満たす自然数 n は $n = 1$？

☆　これを生徒に説明し、考えさせる（グループで考えさせるのも面白い）。
　生徒の実態に応じて、課題プリントとしても良い。但し、あくまでも正解を出すということよりも、どれだけいろいろなことを考えられるかにポイントをおき、頭に浮かんだことを何でもたくさん書いてくるようにとコメントして課題にする。

3　【問題が解けたら終わりではない】【一般化】

《ラグランジュの補間》

　理科などでは、実験のデータをグラフ用紙に書き入れ、その点を通るグラフを描き、その式を求めたりすることがある。点が 3 つあれば、2 次式が決定するが、それを手始めに、3 点を通る 2 次関数の復習問題を生徒に提示する。

☆　その後で、ラグランジュという人がこんなことを考えたと言って、ラグランジュ補間の手法を説明する。
　$x = a$ のとき 1 となり、$x = b, c$ のとき 0 となる 2 次式が $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}$ であることを見つけて、これをうまく利用して上記問題を解いた追体験を生徒にさせる（但し、上記の a, b, c をそのままでするかどうかは、生徒の実態に因る）。
　この後、「じゃ、次に皆だったらどんなことを考えてみる」と聞いてみることも大切。

4　【機械的人間への警告】

　盲目的に技能を身につけるだけの生徒への警告として、答えのない問題を出すことも考えられる。

《例》

　2 次関数 $y = 2x^2 + ax + b$ が、$x = 1$ で最大値 3 をとるように、定数 a, b の値を定めよ。

5　【驚きから興味・関心を引き出す】【教師の思いを伝える】

《どちらが正しい》

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{3}{2}$ のとき、$\sin theta \cos\theta$ の値を A 君、B 君はそれぞれ次のように解いた。答えが違う。

以下の 2 人の解答を読んで各自思うこと（感想）を述べよ。

＜A君＞

$$\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - (\sin\theta + \cos\theta) + \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore\quad \sin\theta - \frac{1}{2} = 0\,,\ \cos\theta - \frac{1}{2} = 0 \quad (\because 2\text{ 乗の和が }0\,)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} = 0\,,\ \cos\theta = \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

＜B君＞

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\therefore\quad \sin\theta\cos\theta = \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{2} = \frac{5}{8}$$

☆　これも、グループ討議や課題として扱えるが、うまくいけば教師の思いを伝える更に発展した話が可能になる。いわゆる、考えたこと、思ったこと等をレポートするつもりで、この問題に関してどれだけいろいろ考えたり思ったりできるかをポイントにすることを生徒に伝える。

《注》　ここでも要注意は、「$\sin\theta + \cos\theta$ の最大値は $\sqrt{2}$ である。だから、$\sqrt{2}$ より大きな値である $\dfrac{3}{2}$ にはなり得ず、間違った仮定から出発しているので、どんな結果が出ても不思議ではない」というレポートには、“ 素晴らしい ” という評価は与えたくないことだ。

いろいろ考えたことを書いてくれるレポートに良い評価を与えたい。「三角関数にも複素数の値を考えたらどうか」くらいのアイデア（うまくいくいかないの話しを度外視）を期待したい。

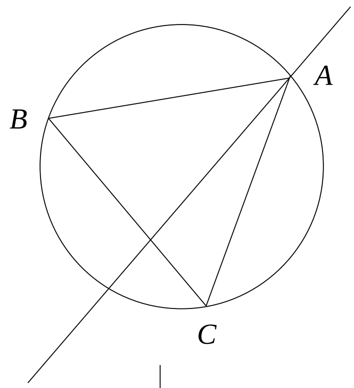
6　【驚きから興味・関心を引き出す】

《ベルトランのパラドックス：どちらが本当の確率？》

与えられた円に交わる直線を引くとき、その円に内接する正三角形の１辺の長さよりも長くなる確率はいくらか。

《解１》

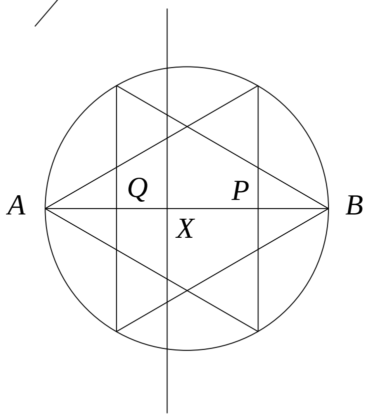
直線が円と交わった２点のうち片方を A とし、A を頂点とする円の内接正三角形の残りの頂点を B, C とする。このとき、直線と円のもう一方の交点が円弧 BC の間にある時に、内接正三角形の一辺より長くなる。円弧 BC は円周の $\dfrac{1}{3}$ の長さなので、求める確率は $\dfrac{1}{3}$ である。



《解２》

円と交わる直線に垂直な直径を AB とする。点 A を頂点とする円の内接正三角形の点 A の対辺と直径 AB との交点を P とする。また、点 B を頂点とする円の内接正三角形の点 B の対辺と直径 AB との交点を Q とする。円と交わる直線との交点を X とすると、点 X が線分 PQ に含まれる時に内接正三角形の一辺より長くなる。

線分 PQ の長さは直径の半分なので、求める確率は $\dfrac{1}{2}$ である。



《注》　深入りすると数学的に難しい。生徒が混乱を起こさないかどうかの判断が大切。生徒に提示する場合には要注意。