北数教“第 75 回数学教育実践研究会”

安田の課題学習：漸化式にまつわって

レポート

平成 22 年 11 月 27 日 (土)

アスティ４５ビル

北海道滝川高等学校　安田富久一

これまでにも本研究会で「ケンブリッジに挑戦」として紹介してきた問題についてのレポートである。今回は、その問題文に書かれている言葉（単語）に触発されてやってみたことの発表である。ひょっとしたら、数学における課題学習の参考になるかも知れないと思い紹介する。

問題は次の通り。

【問２２】

$\alpha > \beta > 0$ とし、漸化式

$$\begin{cases} u_1 = \alpha + \beta \\ u_n = \alpha + \beta - \dfrac{\alpha\beta}{u_{n-1}} \ (n > 1) \end{cases} \tag{1}$$

で決まる数列 $\{u_n\}$ について、

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \tag{2}$$

であることを示せ。また、次の極限値を決定せよ。

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

さらに、$\alpha = \beta > 0$ の場合について、論ぜよ。(*Math. Trip.* 1933)

以下に、先ず単純に解答を示す。その後で、上の問題文の最後が“$\alpha = \beta$ の場合はどうか”ではなく

$\alpha = \beta > 0$ の場合について、論ぜよ

とある。

何故このような聞き方をしたのか、に注意して考えたら楽しかった。

訳し間違いっていていてはいけないので、確認のためこの部分の原文を記すと

Discus the case $\alpha = \beta > 0$.

である。

それでは先ず単純に解答を示そう。

（解答）

与えられた漸化式から、$u_n = \alpha$ なら、$\beta \neq 0$ より $u_{n-1} = \alpha$ が導かれるので、帰納的に $u_1 = \alpha$ でなければならないが、漸化式から $u_1 = \alpha + \beta$ なので、$\beta = 0$ となってしまい矛盾する。よって、任意の n について $u_n \neq \alpha$ である。同様にして $u_n \neq \beta$ である。

漸化式は次のように 2 種類の変形ができる。

$$u_n - \alpha = \beta \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1}} \tag{3}$$

$$u_n - \beta = \alpha \frac{u_{n-1} - \beta}{u_{n-1}} \tag{4}$$

$u_n - \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ なので (3) を (4) で割って

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}$$

となる。ここで、$v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$, $r = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと、v_n に関する漸化式

$$v_n = r v_{n-1} \quad , \quad v_1 = \frac{\beta}{\alpha} = r$$

が得られる。これから $v_n = r^n$ がわかる。これを u_n の関係に書き直すと $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = r^n$ となり、分母を払い整理すると

$$(1 - r^n) u_n = \alpha - \beta r^n$$

となる。ここで、$0 < r < 1$ より $1 - r^n \neq 0$ なので、

$$u_n = \frac{\alpha - \beta r^n}{1 - r^n} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \tag{5}$$

がわかり、(2) が示された。また、(5) から

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - \beta r^n}{1 - r^n} = \alpha$$

がわかる。

次に $\alpha = \beta$ の場合を考える。このとき元の漸化式は

$$\begin{cases} u_1 &= & 2\alpha \\ u_n &= & 2\alpha - \dfrac{\alpha^2}{u_{n-1}} \ (n > 1) \end{cases}$$

となる。変形すると

$$u_n - \alpha = \alpha \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1}}$$

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{u_{n-1}}{u_{n-1} - \alpha} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{u_{n-1} - \alpha}$$

ここで $w_n = \dfrac{1}{u_n - \alpha}$ とおくと

$$w_n = \frac{1}{\alpha} + w_{n-1} \quad , \quad w_1 = \frac{1}{u_1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\therefore \quad w_n = w_1 + \frac{n-1}{\alpha} = \frac{n}{\alpha}$$

$$\therefore \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \alpha \tag{6}$$

また、最後に得られた式から、

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$$

であり、極限については、$\alpha \neq \beta$ の場合と同じになることがわかる。

【論じてみたい（こだわり **1**)】 極限操作で一般項を*!*

問題文が「$\alpha = \beta > 0$ の場合について答えよ」ではなく、「$\alpha = \beta > 0$ の場合について論ぜよ」となっていることにこだわった。

まず、次の単純な視点でこだわってみた。

$\alpha = \beta > 0$ は $\alpha > \beta > 0$ において $\alpha \to \beta$ とした状況である。すると、$\alpha > \beta > 0$ として得た (2)

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n}$$

において、$\beta \to \alpha$ とすると (6) が得られるのではないか?　と考えたくなる。

実際、$f(x) = x^{n+1}$, $g(x) = x^n$ とおいておくと

$$\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\alpha \tag{7}$$

となり、確かに (6) が得られている。

【論じてみたい（こだわり **2**)】 一意性の利用*!*

こだわり 1 では、前もって $\alpha = \beta > 0$ の場合の答え (6) が求めてあり、それが (2) から極限操作により作ったものと一致していることを確かめた。

これを視点を逆にしてみてはどうか。次のように考えてみた。

(7) の右辺を w_n つまり、

$$w_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\alpha \tag{8}$$

とすると（等しい数なので、見やすくするために便宜上 β を α に変えた）

$$\begin{aligned}
w_1 &= 2\alpha \\
2\alpha - \frac{\alpha^2}{w_{n-1}} &= 2\alpha - \frac{\alpha^2}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\alpha} \\
&= \left(2 - \frac{n-1}{n}\right)\alpha \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\alpha \\
&= w_n
\end{aligned}$$

これは、w_n が漸化式を満たしていることを示している。漸化式を満たす数列はただ一つに決まることは明らかだから、(8) が漸化式の解だと判る。

【論じてみたい（こだわり 3)】 解へ収束！・誤差評価

今回の問題では、u_n が (6) という比較的簡単な式であり、漸化式が成り立つことが比較的容易に検証できたので良かった。そうでない場合にどうするかも考えておきたい。このことにこだわって次のように考えてみた。

漸化式 (1) ＜再掲＞ $\begin{cases} u_1 &= \alpha+\beta \\ u_n &= \alpha+\beta-\dfrac{\alpha\beta}{u_{n-1}}\ (n>1) \end{cases}$ の解 u_n は α,β により決定するので、α,β の関数と見て $u_n(\alpha,\beta)$ と書くことにする。そして、$\alpha \geqq \beta > 0$ とする。

$$|\, u_n(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\alpha)\,| \leqq |\, \alpha-\beta\,| + \alpha\left|\frac{\beta}{u_{n-1}(\alpha,\beta)}-\frac{\alpha}{u_{n-1}(\alpha,\alpha)}\right|$$

である。この式から、$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} u_{n-1}(\alpha,\beta)=u_{n-1}(\alpha,\alpha)$ ならば $\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} u_n(\alpha,\beta)=u_n(\alpha,\alpha)$ であることがわかるので、帰納法で、全ての n について

$$u_n(\alpha,\alpha)=\lim_{\beta\uparrow\alpha} u_n(\alpha,\beta)$$

であることがわかる。つまり、（こだわり 2）のように実際に漸化式に代入して解であることを調べる必要なく、極限で得られたものは解になっていることがわかる。

漸化式を解くだけなら上のことで OK だが、$u_n(\alpha,\alpha)$ と $u_n(\alpha,\beta)$ の誤差を考えたいときがある。そのことを考えると、大ざっぱな評価として次のようなことが簡単にわかる。変形の途中、帰納的にすぐわかることだが、任意の α,β について $u_n(\alpha,\beta) \geqq \beta$ を利用する。

$$\begin{aligned}
|\, u_n(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\alpha)\,| &\leqq |\, \alpha-\beta\,| + \alpha\left|\frac{\beta}{u_{n-1}(\alpha,\beta)}-\frac{\alpha}{u_{n-1}(\alpha,\alpha)}\right| \\
&\leqq |\, \alpha-\beta\,| + \alpha\beta\left|\frac{1}{u_{n-1}(\alpha,\beta)}-\frac{1}{u_{n-1}(\alpha,\alpha)}\right| + \left|\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{u_{n-1}(\alpha,\alpha)}\right| \\
&\leqq 2\,|\, \alpha-\beta\,| + |\, u_{n-1}(\alpha,\beta)-u_{n-1}(\alpha,\alpha)\,| \qquad (9)
\end{aligned}$$

(9) 式を $n=2,3,\cdots,n$ について辺々相加えると

$$|\, u_n(\alpha,\beta)-u_n(\alpha,\alpha)\,| \leqq 2(n-1)\,|\, \alpha-\beta\,| + |\, u_1(\alpha,\beta)-u_1(\alpha,\alpha)\,| = (2n-1)\,|\, \alpha-\beta\,|$$

を得る。例えばこのことから、α と β を $|\, \alpha-\beta\,| \leqq \dfrac{10^{-3}}{2n-1}$ くらい近くに値を取っておくと、$u_n(\alpha,\beta)$ と $u_n(\alpha,\alpha)$ は小数第 2 位まで一致した値だとわかる。

【論じてみたい（こだわり４）】 隣接三項間の漸化式の一般項の場合分けは必要？

馴染みのある隣接三項間の漸化式について論じてみたい。

$$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=0 \tag{10}$$

を考えよう。この解は p,q により決まる関数と見て、$a_n(p,q)$ とおく（面倒を避けるために a_1,a_2 は固定して考える)。（こだわり３）と同様に、$a_n(p,q),a_{n+1}(p,q)$ がともに (p,q) の連続関数であることから $a_{n+2}(p,q)$ も (p,q) の連続関数であることがわかるので、任意の n について

$$\lim_{(p_2,q_2)\to(p_1,q_1)} a_n(p_2,q_2)=a_n(p_1,q_1) \tag{11}$$

であることがわかる。

ところで、

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0 \tag{12}$$

の解は、$\alpha\neq\beta$ のとき、

$$a_n=\frac{a_2-a_1\beta}{\alpha-\beta}\alpha^{n-1}-\frac{a_2-a_1\alpha}{\alpha-\beta}\beta^{n-1} \tag{13}$$

なので、(11) を用いて、$\alpha=\beta$ のときの解が $\beta\to\alpha$ とすることで得られることになる。(13) は

$$\begin{aligned}&a_2\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}-a_1\alpha\beta\frac{\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}}{\alpha-\beta}\\&=a_2\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{n-k-1}\beta^{k-1}-a_1\sum_{k=1}^{n-2}\alpha^{n-k-1}\beta^{k}\end{aligned}$$

と変形できるので

$$\lim_{\beta\to\alpha}\{a_2\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{n-k-1}\beta^{k-1}-a_1\sum_{k=1}^{n-2}\alpha^{n-k-1}\beta^{k}\}=a_2(n-1)\alpha^{n-2}-a_1(n-2)\alpha^{n-1}$$

となる。これから、$\alpha=\beta$ のときの漸化式の解は

$$a_n=a_2(n-1)\alpha^{n-2}-a_1(n-2)\alpha^{n-1}$$

とわかる。

【論じてみたい（こだわり５）】 一般化・誤差評価

一般化すると見やすくなることが多い。今回の問題で、定義域や一様連続性などの細かい議論は気にせず大らかに考えることにして、単純な一般化は

《一般化》

2 変数関数 $f(\alpha,x)$ について、定数 K が存在し

$$|f(\alpha,x)-f(\beta,y)| \leqq K(|\alpha-\beta|+|x-y|)$$

が成り立っているとする。

このとき、漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1}=f(\alpha,a_n) \\ a_1=p \end{cases} \tag{14}$$

により決まる a_n は α,p の関数なので、$a_n(\alpha,p)$ と表すことにすると、任意の n について関数 $a_n(\alpha,p)$ は (α,p) の連続関数であり、以下に記すように誤差評価が得られる。連続性はこれまで同様に単純であるので、誤差評価に全力を注ぐ。

$$\begin{aligned} |a_{n+1}(\alpha,p)-a_{n+1}(\beta,q)| &\leqq |f(\alpha,a_n(\alpha,p))-f(\beta,a_n(\beta,q))| \\ &\leqq K|\alpha-\beta|+K|a_n(\alpha,p)-a_n(\beta,q)| \end{aligned} \tag{15}$$

(15) から

$$\begin{aligned} |a_n(\alpha,p)-a_n(\beta,q)| &\leqq K\ |\alpha-\beta|+K|a_{n-1}(\alpha,p)-a_{n-1}(\beta,q)| \\ K|a_{n-1}(\alpha,p)-a_{n-1}(\beta,q)| &\leqq K^2\ |\alpha-\beta|+K^2|a_{n-2}(\alpha,p)-a_{n-2}(\beta,q)| \\ K^2|a_{n-2}(\alpha,p)-a_{n-2}(\beta,q)| &\leqq K^3\ |\alpha-\beta|+K^3|a_{n-2}(\alpha,p)-a_{n-2}(\beta,q)| \\ \cdots\cdots\cdots \quad &\leqq \quad \cdots\cdots\cdots \\ K^{n-2}|a_2(\alpha,p)-a_2(\beta,q)| &\leqq K^{n-2}\ |\alpha-\beta|+K^{n-2}|a_1(\alpha,p)-a_1(\beta,q)| \end{aligned}$$

を得る。この不等式の辺々を全て相加えると

$$|a_n(\alpha,p)-a_n(\beta,q)| \leqq |\alpha-\beta|\sum_{i=1}^{n-1}K^{i-1}+K^{n-2}|a_1(\alpha,p)-a_1(\beta,q)|$$

$$\therefore\quad |a_n(\alpha,p)-a_n(\beta,q)| \leqq \begin{cases} \dfrac{K^{n-1}-1}{K-1}|\alpha-\beta|+K^{n-2}|p-q| & (K\neq 1) \\ (n-1)|\alpha-\beta|+K^{n-2}|p-q| & (K=1) \end{cases}$$

以上、誤差の評価が得られた。

【論じてみたい（こだわり６）】 野次馬的興味？: 行列の n 乗で漸化式を解く

(14) のように、二項間の漸化式は一つ手前のもの一つで次のものが決まるという形で、心理的に簡単に見える気がする。そこで、三項間の漸化式 (12)

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

を二項間と見る方法について考えてみる。

解説書等でよく見かける方法と本質的に変わらないが、スッキリ感はこれから示す方が勝っているように思う。

$A_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$ とおくと、 $a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$ は

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\1 & 0\end{pmatrix}A_n \quad , \quad A_1=\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix} \tag{16}$$

と表せる。これは二項間である。

また、この表現をしてみると、行列の n を求めることは、単なる受験テクニックという以上に漸化式を解く作業に直結しているという見方ができる。

折角なので、(16) の見方で漸化式を解いておこう。(16) より（等比ベクトルの公式？）、

$$A_n=\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}A_1$$

ここで、行列の n 乗を求めるために対角化を考える。

$S=\begin{pmatrix}1 & -\beta\\-1 & \alpha\end{pmatrix}$ とおくと、$\alpha\neq\beta$ のとき S には逆行列が存在し、

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\1 & 0\end{pmatrix}=S^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}S$$

となる。一般的に任意の 2 次正方行列 A について $(S^{-1}AS)^n=S^{-1}A^nS$ なので、

$$\begin{aligned}\therefore\quad A_n=\begin{pmatrix}\alpha+\beta & -\alpha\beta\\1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}A_1&=S^{-1}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\0 & \beta\end{pmatrix}^{n-1}SA_1\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^{n-1} & 0\\0 & \beta^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\beta\\-1 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2\\a_1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix}a_2(\alpha^n-\beta^n)-a_1(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\alpha\beta\\a_2(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})-a_1(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})\alpha\beta\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ところで、$A_n=\begin{pmatrix}a_{n+1}\\a_n\end{pmatrix}$ であったので、第 2 成分を比較して

$$a_n=\frac{a_2(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})-a_1(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})\alpha\beta}{\alpha-\beta}$$

を得る（当然だが、(12) に一致している）。