北数教“第 94 回数学教育実践研究会”

一を聞いて十を知る
百を識って一を教える

レポート

平成 27 年 10 月 3 日 (土)

札幌市立札幌大通高等学校 視聴覚教室

千歳科学技術大学　安田富久一

1　【はじめに】

数学の教員になろうという学生を念頭に、ある種の問題集のようなものを作ってみようと思い、作った質問集がある。本学の一年生が学習する数学 1 のテキストに付録として巻末に載せた。その中からいくつかをピックアップし紹介する。テキストでは質問集の最初に利用方法を示したが、本資料では最後に＜注＞として原文のまま 2 ページに載せておく。

また、その中の一つの問題（パスカルの三角形）に関わるトピックを紹介する。

2　【質問集の抜粋】

2.1　【定義に関すること】

恒等式

(1) 恒等式とはどんな式のことか？

(2) 2 つの整式が恒等式となるための同値条件を 2 つ示し、それが正しいことを証明せよ。

約分

(1) 約分とはどのような行為かを述べよ。

(2) (1) で述べた行為が正当であることを示せ。

有理数

(1) 有理数の定義について、分数のタイプ及び小数のタイプの定義それぞれを述べよ。

(2) (1) の 2 つの定義は同値であることを示せ。

(3) (1) の 2 種類の定義のタイプにおいて、他方にはない利点はそれぞれ何か？

2.2　【解法テクニック・マニュアルに関すること】

角度を求めるテクニック

(1) 様々な状況において、2 つの線分の角度を測るテクニックを列挙せよ。

(2) 上で示したテクニックで本当に角度が解ることを保証せよ（証明せよ）。

2 次方程式の解法

(1) 2 次方程式の解の公式を導け。

(2) 2 次方程式の解を求める方法にはどんなものがあるか。

対称点

(1) 直線 L と点 A がある。L に関する A の対称点をコンパスと定規でどう作図するか？

(2) L, A が方程式と座標で与えられているときはどうするか？

(3) ベクトル方程式のときはどうなるか？

微分

(1) 微分を知っていることの利点は何か列挙せよ。

(2) 上記で列挙した項目において微分をどのように使うかマニュアルを示せ。

2.3 【知識（公式・定理、その他）に関すること】

0 で割ること

割り算において、0 以外の数で割ることは考えるが、0 で割ることは考えないのはなぜか？

解と係数の関係

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について、解と係数の関係とは何か？

(2) 上で述べたことを 2 通りの方法で証明せよ。

(3) 解と係数の関係は 2 次方程式以外に作れるか？

パスカルの三角形

(1) パスカルの三角形とはどんなものか。

(2) それはどんなことに利用されるものか。

(3) (2) の利用が正当であることを 2 項定理を使わずに示せ。

2.4 ＜注＞

数学を学び、理解し、問題を解く。その際、問題を見た瞬間に基本的な定義や公式・定理等の関連項目が瞬間に頭に浮かんでいる状況があれば良い。そのような基本事項を列挙していく。何も見ずに関連項目も含めて説明できるように、時々、自分で基礎事項を確認してみると良い。基本事項を大意はないが【定義に関すること】【解法テクニック・マニュアルに関すること】【知識（公式・定理、その他）に関すること】と大きく分類しておいた。

列挙した項目をどう利用して学習を進めるかを示しておこう。1 ページに【角度を求めるテクニック】がある。これについては、角度を求めたい場合の状況を自分で想定して、その場合に、こうやれば角度が求められる、という次のようなマニュアルや表を作るのである。

【角度を求めるテクニック】

- 三角形
  3 辺の長さ a,b,c から角 A がわかる
  余弦定理：$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ から A を求める
- 直線の方程式
  2 直線 $\ell_1 : y=a_1x+b_1$, $\ell_2 : y=a_2x+b_2$ の傾きで、ℓ_1 から ℓ_1 への角 θ がわかる
  $\tan\theta=\dfrac{a_1-a_2}{1+a_1a_2}$ から θ を求める
- ベクトルの成分
  2 線分のベクトルの成分表示 $\overrightarrow{AP}=(p_1,p_2)$, $\overrightarrow{AQ}=(q_1,q_2)$ から 角 $\angle PAQ$ がわかる
  $\cos\angle PAQ=\dfrac{p_1q_1+p_2q_2}{\sqrt{{p_1}^2+{p_2}^2}\sqrt{{q_1}^2+{q_2}^2}}$ から $\angle PAQ$ を求める

そして、このマニュアルで本当に角度が正しく求まるのか、理由が書けること。また、上に挙げた 3 つの状況以外にも様々な状況がある。いろんな場合を想定してマニュアルを充実させてみる。(例えば、2 辺とその狭角が解っている三角形があれば、合同条件を満たす三角形なので、3 つの角は全て決定しているはず。残りの角をどうすると求められるか)。これを参考に、列挙項目から得意な分野や興味のある分野のものなど、好きなものから取組むと良い。

3　【トピック】

上記抜粋 2.3【知識（公式・定理、その他）に関すること】の**パスカルの三角形** に関して、問い (1)〜(3) は高校一年生で理解できる問題。(3) で 2 項定理を使わないで証明せよ、と言ってるのだから、逆に考えて、「パスカルの三角形を利用して、2 項定理が証明できないか、つまり、$(x+1)^n$ を展開したときの x^k の係数が $\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ になることを証明してみよう、と考えたりすれば、教材開発が出来てくるのではないかと思う。

折角、パスカルの三角形について言及したので、パスカルの三角形に関する話題をトピックとして紹介する。次に紹介する内容のほとんどは「世界数学名題欣賞」という中国で買ってきたシリーズ本の一冊「フィボナッチ数列」を読んで知った内容である（証明は省略：多くは簡単にわかるが、いくつかは難しい。)。

3.1　パスカルの三角形（楊輝三角形 or 賈憲三角形）

パスカルの三角形は、右図 1 のように三角形状に数が並んでおり、上の段の隣り合う 2 数の和が、その 2 数が隣り合う所の下にある下の段の数となっている。

パスカルは 17 世紀の人物であるが、中国では、自国の数学者、賈憲 11 世紀、楊輝 13 世紀の名を冠して賈憲三角形や楊輝三角形と呼ばれている。

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
.....................
```

図 1

```
  | 1
1 | 1  1
1 | 1  2  1
2 | 1  3  3  1
3 | 1  4  6  4  1
5 | 1  5 10 10  5  1
8 | ...............
```

図 2

右上図 2 は、この図の格段の数を左の壁に押しつけ、右斜め 45° に並ぶ数の和を壁の左に書いていったものである。見るからに壁の左に並んでいる数列はフィボナッチ数列である。

上で述べたことを含め、以降に事実のみを列挙紹介する。図 1 において、一番上の行から下に向かって、0 行、1 行、2 行、$\cdots$ と呼ぶことにする。また、n 行目の左から k 番目の数を ${}_nC_k$ と表すことにする。

(1) ${}_nC_k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ であることを示せ。

(2) 図 2 の壁の左に並ぶ数列はフィボナッチ数列である。

(3) どの行も数は中心に対して左右対称に並んでいる。

(4) n 行目に並んでいる数をすべてたすと 2^n になる。

(5) どの行についても、その行に並んでいる数に左から順に $+$ と $-$ を交互に付けてすべてたすと 0 になる。
　＜例＞ 4 行目：$1-4+6-4+1=0$

(6) p を素数とする。このとき、p 行目の両端の 1 以外はすべて p の倍数である。

(7) k を非負整数とする。このとき、2^k-1 行目の数はすべて奇数である。
　さらに一般に次の 2 つの命題が同値である。
　　「p は素数であり、$0 \leqq r \leqq n$ である任意の整数 r について、${}_nC_r$ は p の倍数にならない」
　　「n は $n = ap^m - 1$ （但し、$0 \leqq a \leqq p,\, m \geqq 0$）の形の整数である」

(8) k を自然数とする。このとき、2^k 行目の両端以外の数はすべて偶数である。

(9) パスカルの三角形の右斜面の任意の場所にある 1 から始め、左斜め下に任意個たしていく。その数の和はたすのをストップした数の右斜め下の数になる。

　例えば、右図 3 の上から 3 行目の右端の 1 から左斜め下に数を 3 個とってたすと

　　$1+3+6=10$ となる。これは、3 個目の数 “6” の右斜め下の数 “10” とイコールになっている。

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
…………

図 3

(10) 自然数 n を 2 進数表示したときに 1 が g 個現われるとする。このとき、パスカルの三角形の第 n 行には 2^g 個奇数が見つかる。

n	パスカルの三角形	n の 2 進数表示	g
0	1	0	0
1	1　1	1	1
2	1　2　1	10	1
3	1　3　3　1	11	2
4	1　4　6　4　1	100	2
5	1　5　10　10　5　1	101	1
6	1　6　15　20　15　6　1	110	2
7	1　7　21　35　35　21　7　1	111	3
8	1　8　28　56　70　56　28　8　1	1000	1
$\cdots$	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots$

(11) パスカルの三角形の第 n 行に並んでいる $n+1$ 個の数を第 $2n$ 列から第 $3n$ 列までににずらす。そして、第 n 行に並んでいる数のうち、n で割り切れる数を○印で囲む。このとき、次の 2 つの命題 (A),(B) は同値である。

　(A)『k は素数である』

　(B)『k 列に並んでいるすべての数は○印で囲まれている』

行＼列	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$\cdots$
0	1																				
1			①	①																	
2					1	②	1														
3							1	③	③	1											
4									1	④	6	④	1								
5											1	⑤	⑩	⑩	⑤	1					
6													1	⑥	15	20	15	⑥	1		
7															1	⑦	㉑	㉟	㉟	㉑	
8																	1	⑧	28	56	
9																			1	⑨	
$\vdots$																					

文　献

【１】「世界数学名題欣賞叢書」
出版：遼寧教育出版社、発行：遼寧新華書店 (1987 年 2 月第 1 版、1989 年 11 月第 3 次版)
この叢書の中の一冊が「フィボナッチ数列」である。
「フィボナッチ数列」編著者：呉振奎。
　余白がたくさんあるので、ついでに叢書の全ての書名を挙げておく。
「猜想」(フェルマー予想)
「黎曼猜想」(リーマン予想)
「假」(連続体仮説)
「希伯特第十」(ヒルベルトの第十番問題)
「欧几里得第五公」(ユークリッドの第五公理)
「哥不完全性定理」(ゲーデルの不完全性定理)
「不点定理」(不動点定理)
「无可微的函数」(至る所微分可能ではない連続関数)
「科克曼女生」(カークマンの女生徒の問題)
「斐波那契数列」(フィボナッチ数列)
「哥巴赫猜想」(ゴールドバッハ予想)
「置多式及其用」(置換多項式とその応用)
「素数判定与大数分解」(素数判定と大きな数の因数分解)