北数教“第８１回数学教育実践研究会”

ほんまに あかんか？

付：多項式の形式微分とテイラー展開

レポート

日 時　平成２４年６月２日（土）

会 場　北海道大学情報教育館３F
スタジオ型多目的中講義室

北海道室蘭栄高等学校　安 田 富久一

【はじめに】レポート作成のきっかけ

今回の問題作成のきっかけは、1 年生の基礎課題研究のポスター発表に次のような言葉があったことだった。

> $\cdots$ の点と直線の距離 $\dfrac{5-\sqrt{16-9t^2}}{\sqrt{(t^2+1)^3}}$ の最小値に興味を持ったが、この最小値を求めるためには数 III の微積分を知らなければ求められないと聞いたので、現段階では諦め $\cdots$ 。

発表者の生徒に、それは本当か？　と疑問を投げかけた。一般的な方法としては、確かに数 III の微積分を知っていれば求められるかも知れない。でも、微積分を知らなければできないという保証はあるのか？　微積分を知らなくても、うまく変形すれば最小値を求められるかも知れないじゃないか。（さらに、これは言わなかったが、“微積が最大最小値問題の万能薬ではない。微積でやると難しいが、他の方法でわかりよいのはいっぱいある”という思いもあった）

何とか微積分を使わずに最小値を求めたくなった。そこで、部屋に戻ってやってみたら、微積分は使ったが、数 II の範囲で（多項式の微積分）で解決できることがわかった。それを伝えた。そして、その日、布団に入って、微積使わんと何とかでけへんのかいな！　と思っていた。、ひょっとしたらこの方法で、というアイデアが浮かび、概略計算をしたらうまくいきそうな感じだった。翌朝、しっかり計算し直してみてうまく解決したのを確認できた。

今回は、その解決を元に、実力テスト問題作成の参考にと思い発表する。

【数 II の範囲での解法】

分子を有理化して

$$\frac{9(1+t^2)}{\sqrt{(t^2+1)^3}\ (5+\sqrt{16-9t^2})}=\frac{9}{\sqrt{t^2+1}\ (5+\sqrt{16-9t^2})}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

を得る。ここで、$5+\sqrt{16-9t^2}=x$ とおいて、t を x への変換を考える。$5+\sqrt{16-9t^2}=x$ の両辺から 5 を引いて 2 乗して変形すると、

$$t^2=\frac{16-(x-5)^2}{9}$$

$$\therefore\quad t^2+1=\frac{25-(x-5)^2}{9}=\frac{10x-x^2}{9}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$

$$\therefore\quad \frac{5-\sqrt{16-9t^2}}{\sqrt{(t^2+1)^3}}=\frac{27}{\sqrt{10x^3-x^4}}\quad(\ \because\ (1),(2)\ )\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

ところで、$5+\sqrt{16-9t^2}=x$ であったから、$5\leqq x\leqq 5+\sqrt{7}$ である。この x の範囲で $10x^3-x^4$ の最大値を求めれば、(3) の最小値が決定する。

$f(x)=10x^3-x^4$ とおいて、微分により最大値を求める。$f'(x)=30x^2-4x^3=x^2(30-4x)$ なので、$5\leqq x\leqq 5+\sqrt{7}$ においては $x=\dfrac{15}{2}$ で最大値となることが分かる。

よって、求める最小値は (3) において $x=\dfrac{15}{2}$ を代入して、$\dfrac{12}{25}\sqrt{3}$ であることが分かる。

【別解：微積分を使わずに】

(3) より、$10x^3-x^4$ の最大値についてわかれば良い。

$$10x^3-x^4=-(x-a)^4+p(x-a)^3+q(x-a)^2+r$$

となるように a,p,q,r を決められるか考えたい。上の式で、$x=y+a$ とおくと、

$$\begin{aligned}-y^4+py^3+qy^2+r&=10(y+a)^3-(y+a)^4\\&=-y^4+(10-4a)y^3+(-6a^2+30a)y^2\\&\qquad+(-4a^3+30a^2)y-a^4+10a^3\\ \therefore\quad -4a^3+30a^2&=0\quad (\because\ y\text{ の係数に着目})\\ a&=\frac{15}{2}\\ p&=-20\ ,\ q=-\frac{15^2}{2}\ ,\ r=10a^3-a^4\end{aligned}$$

これから、

$$\begin{aligned}10x^3-x^4&=-y^4-20y^3-\frac{15^2}{2}y^2+r\\&=-y^2\left(y^2+20y+\frac{15^2}{2}\right)+r\\&=-y^2\left\{(y+10)^2+\frac{15^2-100}{2}\right\}+r\\&\leqq r\quad\left(\because\ y^2\geqq 0,\,(y+10)^2+\frac{15^2-100}{2}>0\right)\\&\qquad(\text{等号成立は } y=0 \text{ のとき、かつその時に限る})\end{aligned}$$

よって、$10x^3-x^4$ は、$y=0$ つまり $x=\dfrac{15}{2}$ のときに最大値 $r=10a^3-a^4=\dfrac{3\cdot 75^2}{4^2}$ をとる。

【自分の課題研究として発展】

このように解決を見ると、やってみたくなったことが出てきた。

> 【課題】
>
> x^4+ax^3 の最小値は微積分を使わずに上の方法で求められるのではないか。上の方法でうまく求められるための a の条件は何か。（この段階で話しを継続させるために、気がついていれば“うまくいくはず”という予想がある程度できているが、ここで話してしまうと面白くなくなるので、あえて伏せておく）

以下にこの課題に取り組んでみる（簡単に終わるので大げさな表現かも知れない)。

$x=y-\dfrac{3}{4}a$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
x^4+ax^3 &= y^4-2ay^3+\frac{9}{8}a^2y-\frac{27}{256}a^4 \\
&= y^2\left(y^2-2ay+\frac{9}{8}a^2\right)-\frac{27}{256}a^4 \\
&= y^2\left\{(y-a)^2+\frac{9}{8}a^2\right\}-\frac{27}{256}a^4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)
\end{aligned}
$$

となるので、この後の議論は既に見たとおりであり、$x=-\dfrac{3}{4}a$ で最小値 $-\dfrac{27}{256}a^4$ をとる。

極めてあっさりと解決してしまった。その理由は出来上がってしまった後でよく考えてみたら、当たり前かも知れない。関数 $y=x^4+ax^3$ は増減表を書いてみるとすぐわかるが、$x=-\dfrac{3}{4}a$ の左で単調減少、右で単調増加する、谷が一つだけの単純なグラフになる。極小点（最小値の点にもなる）で接線を引くと当然 x 軸に平行になっている。つまり、最小値とグラフの差は、常にグラフの方が上にあるという状況で、2 次関数の平方完成のように、(常に 0 以上) + (最小値) の形になっているはず。

そして、ここで極小点でテイラー展開を考えれば、その点では接線の傾きが 0 になるので、関数を $f(x)$ 、極小点を与える x を $x=\gamma$ とすると、

$$
f(x)=f(\gamma)+\frac{f''(\gamma)}{2!}(x-\gamma)^2+\frac{f^{(3)}(\gamma)}{3!}(x-\gamma)^3+\frac{f^{(4)}(\gamma)}{4!}(x-\gamma)^4
$$

となる。ここで、$x=y+\gamma$ とすると、右辺は

$$
py^4+qy^3+ry^2+s
$$

という形になる。これが、(常に 0 以上) + (最小値) のような形になるには、$py^4+qy^3+ry^2$ が $(2\text{ 次式})^2$ になることがないのはすぐわかるので、y^2 でくくってみたら、残りの因数の 2 次式が常に 0 以上になると期待したくなる。実際やってみたらなっている、というのが (4) というわけである。

ここまで来るとテイラー展開を教えたい（生徒に考えさせる機会を与えたい)。でも、数 III どころか高校の範囲を超え、大学教養レベルじゃないか。どうするんだ。

ちょっと待った。また「・・・なければ、・・・できない」と言うのか？　本当か、“・・・なければできない”という証明をしたのか？

微積分を使わずにテイラー展開を教えればいいじゃないか！

【提案：課題研究の教材として】

多項式なら、テイラー展開は数 I で教えられないか？　課題研究にしてはどうか。