北数教“第７１回数学教育実践研究会”

難しい問題に仕上げる

レポートの説明

日　時　　平成21年11月28日(土)

会　場　　アスティ 45 ビル 10Fセミナールーム

北海道滝川高等学校　　安　田　富久一

難しい問題に仕上げる

1　いきなり問題

【発展問題】

$$f(x,y,z)=\frac{\big||x-y|+x+y-2z\big|+|x-y|+x+y+2z}{4} \tag{1}$$

とする。以下の各問に答えよ。

1. $|x|+x \geqq 0$ であることを示せ。
2. $f(a,b,b)$ を簡単な式に変形し、$f(a,b,b)$ は何を示すか簡単な言葉（文章）で表現せよ。
3. $f(a,b,c)$ は何を示すか簡単な言葉（文章）で表現し、その表現が正しいことを示せ。

2　問題作成の経緯

数学セミナー 2007 年 6 月号の記事に次の式が書かれていた。

$$\max(a,b) = \frac{|a-b|+a+b}{2} \tag{2}$$

大阪大学名誉教授 亀高惟倫氏が執筆されている「微分方程式の考え方ー境界値問題とソボレフ不等式」という連載記事で、(2) はその連載第 3 回目 “ 糸のたわみ問題 ” というタイトルで、グリーン関数の話の所に出てきた式です（62 ページ右の列の真ん中より少し下辺り）。

この (2) を見て、びっくりした。それまで、自分の中では暗黙の了解的に $max(a,b)$ は言葉（文章）表現的に「a,b の小さくない方」だとか、最大値だとか、式風に表現したとしても、

$$\max(a,b) = \begin{cases} a & （a \geqq b \text{ のとき}） \\ b & （\text{上記以外の時}） \end{cases}$$

のように、場合分けの式しか頭に浮かべたことがなかった。そして、簡単な一つの式で書こうなどと思ったことがなかったので、驚いた。しかし、示されてみると、考えついて当たり前の式であることに更に驚いた。$a-b$ が 0 以上かどうかで場合分けするんだから、絶対値に似ていると思えば、後はそれ程時間をかけずに思い至ることができた可能性がある。

それで、この式をそのまま問題にすれば、ちょっとした問題になっていると思った。

ただ、余りに芸がなさ過ぎるようにも思った。そこで、この (2) を変形していってみようとして作ったのが、今回の【発展問題】です。

3　数学遊び と 問題の複雑化

ちょっと遊んでみた。

$\max(a,b)$ が式で簡単に書けたなら、次は当然 $\max(a,b,c)$ はどうか一般化に向けて考えてみたくなる。少し考えてみたけれど、(2) の理解と同じ程度の考えではうまく思いつかなかったので、いっぺんにスパッと綺麗な式を得るのは諦めた。

そこで、少し考え

$$\max(a,b,c) = \max\big(\max(a,b)\ ,\ c\,\big)$$

と思い変えて (2) を利用してみようと思った。

$$\begin{aligned} \max(a,b,c) &= \max\big(\max(a,b)\ ,\ c\,\big) \\ &= \frac{\big|\max(a,b)-c\big|+\max(a,b)+c}{2} \\ &= \frac{\big||a-b|+a+b-2c\big|+|a-b|+a+b+2c}{4} \end{aligned}$$

これを (1) にある $f(a,b,c)$ としてもよいが、ちょっと意地悪く難しい感じにするために、a,b,c をやめて x,y,z にしてみたのが (1) だった。(1) を得てからは、小問らしいように一口大の大きさに切り分けてみたつもりが、【発展問題】です。

これには、さらに数学的な話を続けることができます。(1) の式をもっと綺麗にしたい、純粋に数学的にさらに遊んでみたいと思った。それで、対称性を重視して、

$$\begin{aligned}\max(a,b,c) &= \max\big(\max(a,b)\ ,\ c\ \big)\\ \max(a,b,c) &= \max\big(\max(b,c)\ ,\ a\ \big)\\ \max(a,b,c) &= \max\big(\max(c,a)\ ,\ b\ \big)\end{aligned}$$

の 3 式を加えて 3 で割って考えると、

$$\begin{aligned}g(x,y,z) = \ &\frac{1}{12}\Big(\ \big||x-y|+x+y-2z\big|+\big||y-z|+y+z-2x\big|+\big||z-x|+z+x-2y\big| \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad +|x-y|+|y-z|+|z-x|\ \Big)\\ &+\frac{1}{3}(x+y+z)\end{aligned} \tag{3}$$

となる。当初、これを今回のレポートの発展問題としてみようかと考えた。これは、式としても綺麗だし、この式だと次のような綺麗な証明方法をも思いつきやすい。

【(3) が $\max(x,y,z)$ になる証明】

$g(x,y,z)$ は x,y,z についての対称性があり、$x \geqq y \geqq z$ としても一般性は失われないので、これを仮定して変形してみる。

$$\begin{aligned}\big||x-y|+x+y-2z\big| &= 2|x-z| = 2(x-z)\\ \big||y-z|+y+z-2x\big| &= 2|y-x| = 2(x-y)\\ \big||z-x|+z+x-2y\big| &= 2|x-y| = 2(x-y)\\ |x-y| &= x-y\\ |y-z| &= y-z\\ |z-x| &= x-z\\ \therefore\quad g(x,y,z) &= \frac{8x-4y-4z}{12}+\frac{1}{3}(x+y+z) = x\\ &= \max(x,y,z)\end{aligned}$$

では、(3) をなぜ今回レポートの発展問題の式として採用しなかったか。

「こんな純粋に数学的な話があるんだ」

[と生徒に話してやる部分を残しておくのも味わいがあってよいように最終的に思った、というのが舞台裏です（勿論、一番はそうやって遊んでみようと思ってくれる生徒がいてくれることですが)。

4　【後日談】

5 日前の月曜日、お風呂に入っていて、この問題を考えていた。すると、(2) が実は小学校の算数問題レベルだということに気づいた。

【 算数問題 】

太郎君には次郎君という弟がいます。二人は年が 6 歳離れています。平均年齢は 7 歳だと言ってました。では、太郎君は何歳でしょう？

ところで、(2) を

$$\max(a,b) = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}$$

と分解してみると、まさしく上の算数問題です。

湯につかりながら再度愕然としたのと同時に、高校生におもしろい話をしてやることができる問題になる、と感じました。