北数教“第７５回数学教育実践研究会”

$\dfrac{1}{x^n-1}$の部分分数への分解

レポート

平成 22 年 11 月 27 日 (土)

アスティ４５ビル

北海道滝川高等学校　安田富久一

1　はじめに

平成 22 年 8 月 6 日・7 日の“第 74 回数実研　兼　夏季セミナー”で、村田洋一さんは不定積分

$$\int \frac{1}{x^5-1}dx$$

について発表されました。そして、その発表の中で

$\displaystyle\int \frac{1}{x^7-1}dx$ は“数学のいずみ”に既に発表済みであるが、

一般に $\displaystyle\int \frac{1}{x^n-1}dx$ についてどうなるだろうか?

と話されていました。

家に戻り、岩波文庫の岩波全書“数学公式集 I・II・III ”により一般のものが紹介されていました。ただ、正しいことの証明が付いていないので、取り組んでみたところ解決し、しかも非常にうまく処理できました。今回、その処理のメインに当たる $\dfrac{1}{x^n-1}$ の部分分数分解について紹介します。

2　結果

$$\frac{1}{x^n-1}=\begin{cases} \dfrac{1}{2p}\left\{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1}\dfrac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}\right\} & (n\text{ が偶数 }n=2p\text{ のとき}) \\ \dfrac{1}{2p+1}\left\{\dfrac{1}{x-1}+\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\dfrac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}\right\} & (n\text{ が奇数 }n=2p+1\text{ のとき}) \end{cases}$$

3　証明

証明には次に示す補題を用意してから取りかかる。

与えられた自然数 n に対し、$\omega_k=\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ とおく。次の補題が示せる。

【補題】

① $x^n-1=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-e^{i\omega_k})$

② $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\omega_k}\prod_{\ell\neq k}^{n-1}(x-e^{i\omega_\ell})=n$

【補題の証明】

① $\omega_k=\dfrac{2k\pi}{n}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ は、半開区間 $[0,2\pi)$ 内の異なる n 個の数なので、$e^{i\omega_k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ は異なる n 個の複素数となる。しかも、$(e^{i\omega_k})^n=1$ つまり、$e^{i\omega_k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ は n 次方程式 $x^n-1=0$ の全ての解となり、①は証明された。

② ① の両辺を微分すると、

$$
\begin{aligned}
nx^{\,n-1}&=\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\ell\neq k}^{n-1}(x-e^{i\omega_\ell})\\
n(e^{i\omega_j})^{n-1}&=\prod_{\ell\neq j}^{n-1}(e^{i\omega_j}-e^{i\omega_\ell})\\
\therefore\quad n&=e^{i\omega_j}\prod_{\ell\neq j}^{n-1}(e^{i\omega_j}-e^{i\omega_\ell})
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで、$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\omega_k}\prod_{\ell\neq k}^{n-1}(x-e^{i\omega_\ell})$ を考えると、$(n-1)$ 次以下の多項式であり、しかも (1) より、異なる n 個の値 $e^{i\omega_j}$ $(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ でいづれも n になるので、②が証明された。

いよいよ、今回の結果の証明に取りかかろう。

【今回の結果の証明】

①, ② を利用すると、$\dfrac{1}{x^{\,n}-1}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{i\omega_k}\prod_{\ell\neq k}^{n-1}(x-e^{i\omega_\ell})}{\prod_{k=0}^{n-1}(x-e^{i\omega_k})}=\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}}$ である。また、$k+\ell=n$ のとき、$\omega_k+\omega_\ell=2\pi$ なので、$e^{i\omega_k}$ と $e^{i\omega_\ell}$ は互いに共役な複素数であることに注意すると、次のようになる。

n が偶数 $n=2p$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{2p}{x^{\,2p}-1}&=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}}+\sum_{k=p+1}^{2p-1}\frac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}}\\
&=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}}+\frac{e^{i\omega_{2p-k}}}{x-e^{i\omega_{2p-k}}}\right)\\
&=\frac{1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{e^{i\omega_k}(x-e^{i\omega_{2p-k}})+e^{i\omega_{2p-k}}(x-e^{i\omega_k})}{(x-e^{i\omega_k})(x-e^{i\omega_{2p-k}})}\\
&=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}\\
\therefore\quad \frac{1}{x^{\,2p}-1}&=\frac{1}{2p}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}\right\}
\end{aligned}
$$

n が奇数 $n=2p+1$ のとき、

$$
\begin{aligned}
\frac{2p+1}{x^{2p+1}-1} &= \frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}}+\sum_{k=p+1}^{2p}\frac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}} \\
&= \frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{e^{i\omega_k}}{x-e^{i\omega_k}}+\frac{e^{i\omega_{2p-k+1}}}{x-e^{i\omega_{2p-k+1}}}\right) \\
&= \frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{e^{i\omega_k}\left(x-e^{i\omega_{2p-k+1}}\right)+e^{i\omega_{2p-k+1}}\left(x-e^{i\omega_k}\right)}{\left(x-e^{i\omega_k}\right)\left(x-e^{i\omega_{2p-k+1}}\right)} \\
&= \frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1} \\
\therefore \quad \frac{1}{x^{2p+1}-1} &= \frac{1}{2p+1}\left\{\frac{1}{x-1}+\sum_{k=1}^{p}\frac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}\right\}
\end{aligned}
$$

4　補足

以下、今回得た結果を使って、不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^n-1}dx$ を、n が偶数 $n=2p$ の場合と奇数 $n=2p+1$ の場合に分けて求めておこう。

$n=2p$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{x^{2p}-1}dx &= \frac{1}{2p}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p-1}\int\frac{2(\cos\omega_k)x-2}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}dx \\
&= \frac{1}{2p}\log\frac{|x-1|}{|x+1|}+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\int\frac{(\cos\omega_k)(x-\cos\omega_k)-\sin^2\omega_k}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}dx \\
&= \frac{1}{2p}\log\frac{|x-1|}{|x+1|}+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p-1}(\cos\omega_k)\int\frac{2(x-\cos\omega_k)}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}dx \\
&\qquad -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\int\frac{\sin^2\omega_k}{x^2-2(\cos\omega_k)x+1}dx \\
&= \frac{1}{2p}\log\frac{|x-1|}{|x+1|}+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p-1}(\cos\omega_k)\log\left|x^2-2(\cos\omega_k)x+1\right| \\
&\qquad -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\int\frac{1}{\left(\dfrac{x-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2p}\log\frac{|x-1|}{|x+1|}+\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{p-1}(\cos\omega_k)\log\left|x^2-2(\cos\omega_k)x+1\right| \\
&\qquad -\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}2(\sin\omega_k)\arctan\left(\frac{x-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right)
\end{aligned}
$$

と求められる。

$n=2p+1$ のときも全く同様にして

$$\int \frac{1}{x^{2p+1}-1}dx = \frac{1}{2p+1}\log|x-1| + \frac{1}{2p+1}\sum_{k=1}^{p}(\cos\omega_k)\log\left|x^2-2(\cos\omega_k)x+1\right| \\ -\frac{2}{2p+1}\sum_{k=1}^{p}(\sin\omega_k)\arctan\left(\frac{x-\cos\omega_k}{\sin\omega_k}\right)$$

と求められる。