【レポート発表の動機】

かつて紹介発表したレポート「ケンブリッジに挑戦」に部分的に解答をつけ、そのときに使った方法で一度使ってみたいと思っていた技法が使えた、という発表を第 72 回数実研で行った。

今回は、その同じ「ケンブリッジに挑戦」の問題で、前回第 72 回の時には出来ていなかった【問９】が解け、その解法が数学の問題解決に教訓的であり、紹介したい。

- どのように解法の糸口を掴むか ＜問題解決能力＞
- 失敗したとき、”All or Nothing” ? ＜反省＞
- 正しいことをどう説明するか ＜コミュニケーション能力＞

を生徒に例示する良い問題だと思う。

マニュアルに沿ってやれば出来るとわかっている問題を如何に計算間違いせずにこなすか、という問題練習に加え、この種の問題を扱う事も大切ではないかと思っている。

まず、【問９】は次のような問題である。

【問９】

a,b,x,y は有理数であり、

$$(ay-bx)^2+4(a-x)(b-y)=0 \tag{1}$$

を満たしているとする。このとき、次のどちらかが必ず成り立つ。

① $x=a$, $y=b$

② $1-ab$, $1-xy$ はともに有理数の 2 乗に等しい。（ *Math. Trip.* 1903 ）

この証明を 2 種類紹介する。一つは自分で漕ぎつけたもの。もう一つ（別証明）は、「ケンブリッジに挑戦」のレポートを見て、解いてみられ解答を教えて下さったものにあったアイデアを頂いてアレンジさせて頂いたもの、である。

詳しい証明は最後につけるとして、今回レポートの説明のために、解答のエッセンス部分を次に示す。

（解答１）

$$\begin{aligned}
(1)\text{ の左辺} &= \{(a-x)y-(b-y)x\}^2+4(a-x)(b-y)\\
&= \{(a-x)y+(b-y)x\}^2+4(1-xy)(a-x)(b-y)\\
\therefore\ 1-xy &= -\frac{\{(a-x)y+(b-y)x\}^2}{4(a-x)(b-y)}\\
&= \left\{\frac{(a-x)y+(b-y)x}{ay-bx}\right\}^2 \quad (\because (1)) \qquad (2)
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
(1)\text{ の左辺} &= \{a(y-b)-b(x-a)\}^2+4(a-x)(b-y)\\
&= \{a(y-b)+b(x-a)\}^2+4(1-ab)(a-x)(b-y)\\
1-ab &= \left\{\frac{a(y-b)+b(x-a)}{ay-bx}\right\}^2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

が得られる。(2) , (3) より、【問９】は証明された。

（解答２）

$$\begin{aligned}(a^2y-abx-2a+2x)^2 &= \{a(ay-bx)-2(a-x)\}^2\\ &= a^2(ay-bx)^2-4a(ay-bx)(a-x)+4(a-x)^2\\ &= -4a^2(a-x)(b-y)-4a(ay-bx)(a-x)+4(a-x)^2\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\because \text{与えられた条件式})\\ &= 4(a-x)\{-a^2(b-y)-a(ay-bx)+a-x\}\\ &= 4(a-x)^2(1-ab) \qquad (4)\end{aligned}$$

同様にして

$$(b^2x-aby-2b+2y)^2 = 4(b-y)^2(1-ab) \qquad (5)$$
$$(y^2a-bxy-2y+2b)^2 = 4(y-b)^2(1-xy) \qquad (6)$$
$$(x^2b-axy-2x+2a)^2 = 4(x-a)^2(1-xy) \qquad (7)$$

$x \neq a$ とすると、(4) , (7) から、

$$1-ab=\left\{\frac{a^2y-abx-2a+2x}{2(a-x)}\right\}^2,\ 1-xy=\left\{\frac{x^2b-axy-2x+2a}{2(x-a)}\right\}^2$$

$y \neq b$ とすると、(5) , (6) から、

$$1-ab=\left\{\frac{b^2x-aby-2b+2y}{2(b-y)}\right\}^2,\ 1-xy=\left\{\frac{y^2a-bxy-2y+2b}{2(y-b)}\right\}^2$$

よって、【問９】は証明された。

この解答２には次のいきさつがある。

「ケンブリッジに挑戦」のレポート問題に興味を持ち、手紙を下さった方（Ａ氏）がいた。Ａ氏の解法のアイデア・趣旨を生かしたものが解答２である。

Ａ氏は次のように論を進めた。

【Ａ氏の解の概略論旨】

$$(ax+by-2)^2 = 4(1-ab)(1-xy) \qquad (8)$$

と変形し、これをもとに

$<A>$　$1-ab, 1-xy$ が共に有理数の２乗のとき

$<B>$　$1-ab=1-xy$ のとき

$<C>$　$1-ab=pq^2, 1-xy=pr^2$ $(p \neq 1, q \neq 1, r \neq 1)$ のとき

という場合を設定し、それぞれについて考察されて証明が完了したという結論に達した。

しかし、Ａ氏は【問９】の条件式を

$$(ax-by)^2+4(a-x)(b-y)=0$$

として考えを進められていたので、推論の根拠となる (8) 自身が駄目になり、【問９】に答えたことにはならないものになっていた。

A氏の考えられた方法を生かすという視点で、証明の核心部分を探してみた。A氏は $<C>$ の場合の推論で、ある種の 2 次方程式を解いて「$\sqrt{D}$ が有理数になるので、$D=$ 有理数の 2 乗」というアイデアを使っていた。

このアイデアは面白く感じたので、本来の【問９】に何とか生かせないか考えたくなった。

そして、

それなら、$<A><B><C>$ などを経ず、最初から考えて駄目なのか？

と思った。この考えで解くと以下のようになった。

【解答３】

与えられた条件式を展開し y について整理すると、

$$a^2y^2-2(abx+2a-2x)y+b^2x^2-4bx+4ab=0 \tag{9}$$

これから

$$\begin{aligned} y &= \frac{abx+2a-2x\pm\sqrt{D'}}{a^2} \\ \therefore \quad D' &= (a^2y-abx-2a+2x)^2 \end{aligned} \tag{10}$$

ここで、(9) から判別式を計算すると、

$$\begin{aligned} D' &= (abx+2a-2x)^2-a^2(b^2x^2-4bx+4ab) \\ &= 4(1-ab)x^2-8a(1-ab)x+4a^2(1-ab) \\ &= 4(1-ab)(x-a)^2 \end{aligned} \tag{11}$$

(10),(11) より

$$4(1-ab)(x-a)^2=(a^2y-abx-2a+2x)^2 \tag{12}$$

また、(9) を x,a,b のそれぞれについて整理し、x,a,b それぞれの 2 次方程式と見て同じ推論をすると、

$$4(1-ab)(y-b)^2=(b^2x-aby-2b+2y)^2 \tag{13}$$

$$4(1-xy)(b-y)^2=(y^2a-bxy-2y+2b)^2 \tag{14}$$

$$4(1-xy)(a-x)^2=(x^2b-axy-2x+2a)^2 \tag{15}$$

が得られる。

$x\neq a$ とすると、(12) , (15) から、

$$1-ab=\left\{\frac{a^2y-abx-2a+2x}{2(x-a)}\right\}^2 \quad , \quad 1-xy=\left\{\frac{x^2b-axy-2x+2a}{2(a-x)}\right\}^2 \tag{16}$$

$y\neq b$ とすると、(13) , (14) から、

$$1-ab=\left\{\frac{b^2x-aby-2b+2y}{2(y-b)}\right\}^2 \quad , \quad 1-xy=\left\{\frac{y^2a-bxy-2y+2b}{2(b-y)}\right\}^2 \tag{17}$$

よって、【問９】は示された。

解答３を証明として仕上げるために更に煮詰めたのが、解答２である。

解答３は

- ２次方程式と見て解の公式を書く
- 判別式を二種類の方法で書き表して等しいと置く

というスタイルをとっている。自分が考えた筋道は確かに上記の通りである。

しかし、【問９】が正しいことを知りたい人は、

私がどのように考えたかはどうでもいいはずである。

解答３の証明をじっくり見直すと、(12)〜(15) の等式の成立がわかりさえすれば、(12)〜(15) が導かれてきた由来はどうでも良いことに気づく（ここに、味も、栄養価も、安全性も何もかもがそっくり同じトマトがあれば、それが温室育ちであろうが畑育ちであろうが構わない：例がちょっと変やろか？）。

由来をそっくり取り除くと解答２ができたという訳である。

これは、人と議論をするときにおいて、問題点の所在をしっかり見抜く訓練になるし、自分の論拠の正当性を示すときに、余計な議論を排除し核心を見抜き示す練習にもなる。その意味では、大げさではあるが、コミュニケーション能力の育成を図るための数学の教材の一つと言えるのではないかと思う。

＜余談＞

判別式を二種類計算してイコールと置く、というのをよく考えれば、２次方程式を解いたというより、平方完成を考えたという方がよりぴったりだということにも気づく。

$$
\begin{aligned}
&ax^2+bx+c=0\\
&4a^2x^2+4abx+4ac=0\\
&4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac\\
\therefore\ &D=(2ax+b)^2
\end{aligned}
$$

（解答１詳細）

まず $x=a$ だとするとどうなるかを見ておく。$x=a$ を (1) に代入すると $a^2(y-b)^2=0$ となる。これから、$a=0$ または $y=b$ がわかる。

ここで、$a=0$ の場合を考えると、$x=a=0$ なので、$1-ab, 1-xy$ は共に $1(=1^2)$ であり、(2) が成り立つ。また、$y=b$ なら (1) が成立していることになるので、$x=a$ のときは題意が成立していることになる。

$y=b$ のときも同様の議論で、題意が成立することになるので、$x\neq a, y\neq b$ の場合に (2) が成り立てば、証明が完了する。

(1) の 2 乗の項を次のように 2 種類に変形してみる

$$ay-bx=(a-x)y-(b-y)x \tag{18}$$
$$ay-bx=a(y-b)-b(x-a) \tag{19}$$

(18) を元に考えると

$$\begin{aligned}(1)\text{ の左辺} &= \{(a-x)y-(b-y)x\}^2+4(a-x)(b-y)\\ &= \{(a-x)y+(b-y)x\}^2+4(1-xy)(a-x)(b-y)\end{aligned} \tag{20}$$

であるから、$x\neq a, y\neq b$ なら、(20) より

$$\begin{aligned}1-xy &= -\frac{\{(a-x)y+(b-y)x\}^2}{4(a-x)(b-y)}\\ &= \left\{\frac{(a-x)y+(b-y)x}{ay-bx}\right\}^2 \quad (\because (1))\end{aligned} \tag{21}$$

となり、

同様に (19) を元にすると、

$$\begin{aligned}(1)\text{ の左辺} &= \{a(y-b)-b(x-a)\}^2+4(a-x)(b-y)\\ &= \{a(y-b)+b(x-a)\}^2+4(1-ab)(a-x)(b-y)\end{aligned} \tag{22}$$

であり、(18) を元にしたときと同様にして

$$1-ab=\left\{\frac{a(y-b)+b(x-a)}{ay-bx}\right\}^2 \tag{23}$$

が得られる。(21),(23) より、(2) が成立していることがわかり、【問９】は証明されたことになる。