北数教“第７８回数学教育実践研究会”

こんな所に　フィボナッチ！

レポート

日　時　　平成２３年８月６日（土）

会　場　　北海道小樽桜陽高等学校

北海道室蘭栄高等学校　　安　田　富久一

フィボナッチ数列の応用

1　はじめに

フィボナッチ数列の応用は様々紹介されている。今回のレポートでは、一般に紹介されることが多くないと思われる応用をお知らせしたい。中国語で“優選法”と記載されているもの（日本語での専門用語が何に相当するのか知らない）でのフィボナッチ数列の応用である。それは一言で言うと関数の極値を求める数値計算の問題である。

今回紹介するのは、定義域 $[a, b]$ 上のある種の関数 $f(x)$ が与えられているとき、極値を与える x^* を含むなるべく長さが短い区間を得るマニュアルである。

＜注＞　x^* を見つけるマニュアルではない。微分ができる関数なら微分で x^* を見つける方法がある。微分ができない関数でも、元の関数の値を計算していくだけで、極値を与える点に十分近い区間を見つけようというのが今回紹介するものである。

2　条件設定

これから考える関数は“単峰”であるとする。

関数 $f(x)$ が単峰とは、その定義域 $[a, b]$ においてただ一つの極小点 x^* を持ち、しかも $f(x)$ は $[a, x^*]$ で狭義単調減少し、$[x^*, b]$ で狭義単調増加しているもののことである（極大点の場合にも同様の状況を単峰という．今回のレポートでは極小点の場合を考える。）。

3　問題設定

最初与えられている定義域の区間があり、極小点を含む区間をいかに小さく絞り込めるかが問題になっている。

ところで、$F(x) = f(Lx)$ として、関数 $f(x)$ の x を L 倍して Lx と変数変換した関数 $F(x)$ を考えると、$y = F(x)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを y 軸方向へ $\dfrac{1}{L}$ 倍拡大・縮小（L と 1 との大小関係で拡大か縮小かが決まる）したものである。そして、考える区間も $\dfrac{1}{L}$ 倍となる。よって、いかに小さく区間を絞り込むかということは、本質的には、元の区間と絞り込んだ後の区間との比をどれだけ小さくできるかということと同じになる。

この事実を用いて、逆の視点で見ると、

【問題】　絞り込まれた後の区間の長さが 1 となるような元の区間で、長さが最大となる区間のその長さについて考察する

を考えればよいことがわかる。

4　結論：最優化の算法（フィボナッチ数列の方法）

$f(x)$ は区間 $[a,b]$ で単峰であり、極値点 x^* を持っているとする。$f(x)$ の極小点の近似区間について、$[a,b]$ 内に点を取って n 回関数値を計算するという方法で望む長さの区間幅でなるべく回数 n を少なくして求めようとすれば、フィボナッチ数列の活躍を見ることになる。

一般論としてのマニュアルを示す前に、具体例でどのようにするかを見ておく。

以後使うことになるフィボナッチ数列を $\{u_n\}$ で表すことにする。漸化式で

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ u_0 = u_1 = 1 \end{cases}$$

とする。

2 次関数はこれから示す方法をしなくても簡単に極小点を近似ではなく求められるが、今回レポートする一般論としてのマニュアルを理解するための例として見てもらう。

【具体例】

$f(x) = (x-3)^2$ を $[0,5]$ で考える（単峰は明らか）。

この関数の極小点の近傍区間を『幅が $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ 以下となる区間内に収めたい』という要求に応えようと思う。

この具体例を用いて操作を始める前に、繰り返し用いる操作があるので、それを説明しておく。それは、与えられた区間から新たに区間を作り出す操作のことである。（その操作を『絞り込み』と勝手に名付けておく）

【絞り込み操作】

与えられた区間 $[a,b]$ に対して、この区間で単峰な関数 $f(x)$ があるとする。この区間 $[a,b]$ に含まれる 2 つの数 $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ $(\widetilde{a} < \widetilde{b})$ をとったとき、次のように場合を分けて新たな区間 $[A,B]$ を作る。この操作を絞り込みと呼ぶことにする。

$$f(\widetilde{a}) \leqq f(\widetilde{b}) \quad \text{ならば} \quad A = a\ ,\ B = \widetilde{b} \quad \text{とおく}$$
$$f(\widetilde{a}) > f(\widetilde{b}) \quad \text{ならば} \quad A = \widetilde{a}\ ,\ B = b \quad \text{とおく}$$

この絞り込み操作で作られた新たな区間 $[A,B]$ においても、$f(x)$ **はやはり単峰である（ 極小点は区間** $[A,B]$ **からはずれてしまうことはない ）**。

この準備のもとで次のようにする。

① $[0,5]$ を $[a,b]$ と表す（ $a=0$, $b=5$ とおく）。

② $u_n \geqq \dfrac{b-a}{\varepsilon}$ つまり $u_n \geqq 10$ を満たす最小の自然数 n を N とする（$N=6$ となる）。

③ $n = N$ とおく。

④ 次のように $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ をとる

$$\begin{cases} \widetilde{a} = \dfrac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a = \dfrac{u_4}{u_6}\times 5 = \dfrac{5}{13}\times 5 = \dfrac{25}{13} \\ \widetilde{b} = \dfrac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a = \dfrac{u_5}{u_6}\times 5 = \dfrac{8}{13}\times 5 = \dfrac{40}{13} \end{cases}$$

⑤ ④ の $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ により絞り込み操作をする。

$$f(\widetilde{a}) = f(\frac{25}{13}) = \left(\frac{14}{13}\right)^2 \ , \ f(\widetilde{b}) = f(\frac{40}{13}) = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \quad \therefore\ A = \frac{25}{13}\ ,\ B = 5$$

となり、区間 $[0,5]$ を $[\frac{25}{13},5]$ に第 1 段階絞り込んだ。

⑥ ⑤ で絞り込んだ $[\frac{25}{13},5]$ を与えられた区間（$a = \frac{25}{13}, b = 5$）と見、$n-1$ を新たに n と見て ④〜⑥ を $n = 2$ になるまで繰り返す（ (1) で u_{n-2} が意味を持つのは $n \geqq 2$)。実際やってみると、

【$n = 6-1 = 5$】　$a = \dfrac{25}{13}$, $b = 5$

$$\begin{cases} \widetilde{a} = \dfrac{u_3}{u_5}(b-a)+a = \dfrac{3}{8}\times\dfrac{40}{13}+\dfrac{25}{13} = \dfrac{40}{13} \\ \widetilde{b} = \dfrac{u_4}{u_5}(b-a)+a = \dfrac{5}{8}\times\dfrac{40}{13}+\dfrac{25}{13} = \dfrac{50}{13} \end{cases}$$

絞り込み開始

$$f(\widetilde{a}) = f(\frac{40}{13}) = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \ , \ f(\widetilde{b}) = f(\frac{50}{13}) = \left(\frac{11}{13}\right)^2 \quad \therefore\ A = \frac{25}{13}\ ,\ B = \frac{50}{13}$$

となり、区間 $[0,5]$ を $[\frac{25}{13},\frac{50}{13}]$ に第 2 段階絞り込んだ。

【$n = 5-1 = 4$】　$a = \dfrac{25}{13}$, $b = \dfrac{50}{13}$

$$\begin{cases} \widetilde{a} = \dfrac{u_2}{u_4}(b-a)+a = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{25}{13}+\dfrac{25}{13} = \dfrac{35}{13} \\ \widetilde{b} = \dfrac{u_3}{u_4}(b-a)+a = \dfrac{3}{5}\times\dfrac{25}{13}+\dfrac{25}{13} = \dfrac{40}{13} \end{cases}$$

絞り込み開始

$$f(\widetilde{a}) = f(\frac{35}{13}) = \left(\frac{4}{13}\right)^2 \ , \ f(\widetilde{b}) = f(\frac{40}{13}) = \left(\frac{1}{13}\right)^2 \quad \therefore\ A = \frac{35}{13}\ ,\ B = \frac{50}{13}$$

となり、区間 $[0,5]$ を $[\frac{35}{13},\frac{50}{13}]$ に第 3 段階絞り込んだ。

【$n=4-1=3$】 $a=\dfrac{35}{13}$, $b=\dfrac{50}{13}$

$$\begin{cases} \widetilde{a}=\dfrac{u_1}{u_3}(b-a)+a=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{15}{13}+\dfrac{35}{13}=\dfrac{40}{13} \\ \widetilde{b}=\dfrac{u_2}{u_3}(b-a)+a=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{15}{13}+\dfrac{35}{13}=\dfrac{45}{13} \end{cases}$$

絞り込み開始

$$f(\widetilde{a})=f(\frac{40}{13})=\left(\frac{1}{13}\right)^2\ ,\ f(\widetilde{b})=f(\frac{45}{13})=\left(\frac{6}{13}\right)^2 \quad \therefore\ A=\frac{35}{13}\ ,\ B=\frac{50}{13}$$

となり、区間 $[0,5]$ を $[\dfrac{35}{13},\dfrac{45}{13}]$ に第 4 段階絞り込んだ。

【$n=3-1=2$】 $n=2$ となったのでこの操作で最後。 $a=\dfrac{35}{13}$, $b=\dfrac{45}{13}$

$$\begin{cases} \widetilde{a}=\dfrac{u_0}{u_2}(b-a)+a=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{13}+\dfrac{35}{13}=\dfrac{40}{13} \\ \widetilde{b}=\dfrac{u_1}{u_2}(b-a)+a=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{13}+\dfrac{35}{13}=\dfrac{40}{13} \end{cases}$$

絞り込み開始

$$f(\widetilde{a})=f(\widetilde{b}) \quad \therefore\ A=\frac{35}{13}\ ,\ B=\frac{40}{13}$$

となり、区間 $[0,5]$ を $[\dfrac{35}{13},\dfrac{40}{13}]$ に第 5 段階絞り込んだ。この区間の幅は $\dfrac{5}{13}$ であり、確かに $\dfrac{1}{2}$ より小さい。

この最後の区間 $[\dfrac{35}{13},\dfrac{40}{13}]$ に極小点があれば目的は達成されたことになるが、確かに極小点を与える $x=3=\dfrac{39}{13}$ はこの区間内にある。

5 一般論としての確認と証明

上記の操作で毎回使った方法に名前を付けておこう。区間 $[a,b]$ に対し、 $[a,b]$ の内部に 2 点 $\widetilde{a},\widetilde{b}$ を

$$\begin{cases} \widetilde{a}=\dfrac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a & (1) \\ \widetilde{b}=\dfrac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a & (2) \end{cases}$$

のようにとり、これを元に絞り込みを行って区間 $[A,B]$ を得る操作を、**フィボナッチの絞り込み**と呼ぶことにしよう。

このフィボナッチの絞り込みが持っている性質を見ていこう。

命題 1.
フィボナッチの絞り込みで、区間の長さは $\dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ 倍に縮む。

【証明】 フィボナッチの絞り込みをして得られる区間は $[a,\widetilde{b}]$ か $[\widetilde{a},b]$ かのどちらかである。

$$\widetilde{b}-a=\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)$$
$$b-\widetilde{a}=b-\left\{\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a\right\}=\frac{u_n-u_{n-2}}{u_n}(b-a)=\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)$$

なので、区間の長さは $\dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ 倍に縮んでいる。 （証明終わり）

$[a,b]$ にフィボナッチの絞り込みをしてみよう。(1),(2) 再掲

$$\widetilde{a}=\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a \tag{3}$$
$$\widetilde{b}=\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a \tag{4}$$

を求める。そして、$f(\widetilde{a})\leqq f(\widetilde{b})$ のときを考えると、$[A,B]=[a,\widetilde{b}]$ となる。この $[A,B]$ に続いてフィボナッチの絞り込みをしようとすると、

$$\widetilde{A}=\frac{u_{n-3}}{u_{n-1}}(B-A)+A \tag{5}$$
$$\widetilde{B}=\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}(B-A)+A \tag{6}$$

を求め、$f(\widetilde{A})$ と $f(\widetilde{B})$ の大小関係を調べるために、$f(\widetilde{A})$ と $f(\widetilde{B})$ の関数値を計算することになる。

ところで、(5),(6) を変形してみると、

$$\widetilde{A}=\frac{u_{n-3}}{u_{n-1}}(\widetilde{b}-a)+a=\frac{u_{n-3}}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a=\frac{u_{n-3}}{u_n}(b-a)+a$$
$$\widetilde{B}=\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}(\widetilde{b}-a)+a=\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a=\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a=\widetilde{a}$$

なので、$f(\widetilde{B})$ の関数値は既に計算済みの $f(\widetilde{a})$ である。

また、同様に $f(\widetilde{a})>f(\widetilde{b})$ のときは、$[A,B]=[\widetilde{a},b]$ であり、

$$\begin{aligned}\widetilde{A}&=\frac{u_{n-3}}{u_{n-1}}(b-\widetilde{a})+\widetilde{a}\\&=\frac{u_{n-3}}{u_{n-1}}\frac{u_n-u_{n-2}}{u_n}(b-a)+\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a=\frac{u_{n-1}}{u_n}(b-a)+a=\widetilde{b}\\\widetilde{B}&=\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}(b-\widetilde{a})+\widetilde{a}\\&=\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}\frac{u_n-u_{n-2}}{u_n}(b-a)+\frac{u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a=\widetilde{a}=\frac{2u_{n-2}}{u_n}(b-a)+a\end{aligned}$$

だから、$f(\widetilde{A})$ の関数値は既に計算済みの $f(\widetilde{b})$ である。

結局の所、$f(\widetilde{A})$ と $f(\widetilde{B})$ のどちらが大きくても、その次のフィボナッチ絞り込みをするために計算する関数値の個数は 2 個ではなく 1 個である。

このことを命題としてまとめると次のようになる。

命題 2.

フィボナッチの絞り込みを繰り返し行う場合、フィボナッチの絞り込みの各ステップで区間縮小後に区間内部に残っている方の点は、次のステップで点を取るときに必ず選ばれる点である。つまり、残留点と新点が重なっているということである。

命題 3.

(3),(4) の式からフィボナッチの絞り込みを開始し、第 $(n-1)$ 回まで計算を繰り返す場合、絞り込みのために行う関数値の計算は、n 個の点の関数値のみであり、最終的に絞り込まれた区間の長さは元の区間の長さの $\dfrac{1}{u_n}$ 倍に縮んでいる。

【証明】 最終的に絞り込まれた区間の長さは元の区間の長さの $\dfrac{1}{u_n}$ に縮むこと以外は、既に説明済みである。区間の長さについては、命題 1 を連続して使うことで

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}\cdot\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-3}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_1}{u_2}=\frac{u_1}{u_n}=\frac{1}{u_n}$$

（証明終わり）

6 フィボナッチの絞り込みが最も優れている理由

このような絞り込みに関して、フィボナッチの絞り込みが最も優れている理由を最後に見ておこう。

L_n をある区間の長さとする。しかも、点を取って n 回関数値を計算するとして、起こり得る全ての場合の中で新しく得られる区間の長さが 1 に縮み得るとしよう。最も優れた点の取り方とは、L_n が最大になることを保証するもののことである。

L_k の上限を U_k $(k=1,2,\cdots,n)$ とおく。明らかに、U_k は k 回関数値を計算したあと区間が 1 に縮む区間のうち最大の区間の長さである。2 回関数値を計算すると 1 に縮むような区間を考えると

$$U_0=U_1=1 \tag{7}$$

n 回関数値を計算する場合の上界が U_n であるということを念頭において考えよう。最初にテストする 2 点を x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ とすると、この後続けて計算していくのは $n-2$ 回の関数値とい

うことになる。極小点は区間 $[a, x_1]$ にあるかも知れないし、区間 $[x_1, b]$ にあるかも知れない。極小点が $[a, x_1]$ にあるとき、あと関数値を $n-2$ 回計算して区間が 1 に縮むことになるから、

$$x_1 - a \leqq U_{n-2}$$

である。また、極小点が $[x_1, b]$ にあるとき、$n-2$ 回の関数値の計算の他に既に計算してある x_2 における関数値も利用しないといけないので、あわせて $(n-2)+1 = n-1$ 個の点の関数値を利用することになる。よって、

$$b - x_1 \leqq U_{n-1}$$

$$\therefore \quad L_n = b - a \leqq U_{n-2} + U_{n-1} \tag{8}$$

$$\therefore \quad U_n \leqq U_{n-2} + U_{n-1} \tag{9}$$

(8) から (9) に移るところで、L_n を可能な限り長く取ったものが U_n であることを考えれば、U_n は (9) において等号が成立するようなものとしてあればよいことになる。

ところで、フィボナッチの絞り込みをすれば、命題 3 から n 回関数値を求めると区間が元の $\dfrac{1}{u_n}$ に縮むことがわかっている。逆に言うと、縮んだ後が 1 になる元の区間の長さは u_n であることになる。それは、(9) で等号が成立するようになっている場合だということになる。また、(7) を考え合わせて、フィボナッチの絞り込みは最も優れたものであるとわかる。