北数教“第８２回数学教育実践研究会”
兼 第１８回数実研「夏季セミナー」

＜課題研究＞ オイラーの公式に端を発して

テイラー展開・関数方程式など

レポート

日　時　　平成２４年８月４日（土）

会　場　　北海道小樽桜陽高等学校

北海道室蘭栄高等学校　　安　田　富久一

1　【はじめに（動機）】

今年の 2 年生の課題研究で、いくつか生徒と話した中で、一人の生徒が興味を示したが 3 人共通の課題にならなかったものを私の課題として考えてみた。立ち消えとなった話題は、

$$e^{i\pi} = -1 \tag{1}$$

もし、これについて課題研究することが決まっていたら、生徒をどのように導いてやるかを考えてみた。考えるときの最大の制約条件は“2 年生は微分積分を知らない”である。

(1) を考えるときにすぐに頭に浮かんだのが、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2}$$

を導き、(2) で $\theta = \pi$ を代入してみることだった。しかし

- (2) を示す前に、e って何だ ?
- 実数乗ですら大変だろうに虚数乗って ?
- (2) の右辺はド・モアブルの定理の形なので、積が変数の和になる指数関数的イメージを利用したらどうか ?
- テイラー展開的発想はどうか ?

いろんなことが頭に浮かんだ。

前回の数実研で資料として付けたが、多項式ならテイラー展開の話しが極限操作無しに可能なことを見ている、気持ち的に項が無限に続くような式を形式的に取り扱うというスタイルでやってみようと思ったのが今回の発表である。そして、数学好きの 2 年生に数学感覚的な納得をさせてやるものができるか、現在私自身が課題研究中の問題である。

以降、一様収束、無限級数の収束半径、その他、全く意に介さずに式をいじくって数学を楽しみ遊ぶことに徹したい。

2　【 e って何だ ? 夢の多項式】テイラー展開・関数方程式

前回第 81 回数実研で、多項式の形式的な導関数の話しをした。多項式の変換 D を次のように決める。

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_nx^n \tag{3}$$

に対して $[Df](x)$ という多項式は

$$[Df](x) \overset{\mathrm{def}}{=} a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots + na_nx^{n-1} \tag{4}$$

であると定義する。（何故このように決めたくなるか等の案については、前回のレポート資料で述べた。）このとき、任意の多項式 $f(x)$ について極限の話しをしなくてもテイラー展開

$$f(x) = f(a) + \frac{[Df](a)}{1!}(x-a) + \frac{[D^2f](a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{[D^nf](a)}{n!}(x-a)^n$$

が導かれることを見た。

このように、D の有用性を見た後で、『 D を付けても変わらない多項式を考えてみたい 』ということを示すことで、無限級数による e の定義（後出の (13) ）をしようと思った。

(3) と (4) を比較すると、

$$a_1 = a_0\,,\; 2a_2 = a_1\,,\; 3a_3 = a_2\,,\; \cdots\,,\; ka_k = a_{k-1}\,,\; \cdots \tag{5}$$

これを最初から一つずつ計算していくと、$a_1, a_2, \cdots, a_n$ が a_0 を用いて表すことができ、

$$a_1 = \frac{a_0}{1!}\,,\; a_2 = \frac{a_0}{2!}\,,\; a_3 = \frac{a_0}{3!}\,,\; \cdots\,,\; a_n = \frac{a_0}{n!} \tag{6}$$

となる。

ここで、一つ都合の悪いことがある。それは、(5) において係数比較を行った際、$[Df](x)$ は $n-1$ 次式であり、$f(x)$ の n 次の項が欠けているために、イコールにはならないことである。これは、項がどこまでもあれば解消されるだろうから、夢の世界かも知れないけれど、無限個の和になっている多項式、

$$f(x) = a_0 + \frac{a_0}{1!}x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots = a_0(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots) \tag{7}$$

を考えれば、$[Df](x) = f(x)$ となっている。

この $f(x)$ について、

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= {a_0}^2(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots)(1 + \frac{1}{1!}y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots) \\ &= {a_0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} \frac{1}{i!\cdot j!} x^i y^j \\ &= {a_0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i+j=n} {}_nC_i x^i y^j \\ &= {a_0}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n \\ &= a_0\, f(x+y) \end{aligned}$$

より、$f(x)f(y) = a_0\, f(x+y)$ が成り立つ。$a_0 = 1$ なら $f(x)$ は基本的な関数である指数関数の性質を持っていることになるので、以後、特に $a_0 = 1$ の場合を考えてみたい。

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{8}$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) \tag{9}$$

である。(9) から $f(x) = \left\{ f\left(\dfrac{x}{2}\right) \right\}^2 \geqq 0$ であることに注意しておく。

(9) について帰納法から, 自然数 n について

$$f(nx) = \{f(x)\}^n \tag{10}$$

となる。(10) を利用して、

$$\left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^n = f(1)$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{n}\right) = \{f(1)\}^{\frac{1}{n}} \tag{11}$$

以上から、$x = \dfrac{n}{m}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left\{ f\left(\frac{1}{m}\right) \right\}^{n} \qquad (\because\ (10)) \\
&= \{f(1)\}^{\frac{n}{m}} \qquad (\because\ (11)) \\
&= \{f(1)\}^{x}
\end{aligned}
$$

このことから、$f(1) = e$ とおくと

$$
e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{12}
$$

となる。

ここで e はどんな値だろうか。(12) で $x = 1$ と置いてみると、

$$
e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \tag{13}
$$

となる。(13) の右辺の第 1 項からの和を 1 項 1 項、気長に計算することになる。次のように表にしてみよう。表の左の n は、(13) の右辺の始めから $\dfrac{1}{n!}$ までの和を求めるということを意味しているものとする。また、計算した小数値の循環節まで全て見ていくと大変なので、$n = 12$ 以降は小数第 70 位で打ち切って表示する。

n	値
1	2
2	2.5
3	$2.\dot{6}$
4	$\underline{2.7}08\dot{3}$
5	$\underline{2.71}\dot{6}$
6	$\underline{2.718}0\dot{5}$
7	$\underline{2.71\dot{8}2}539\dot{6}$
8	$\underline{2.7182}78769\dot{8}4126\dot{9}$
9	$\underline{2.718281}\dot{5}2557319223985890\dot{6}$
10	$\underline{2.718281}80\dot{1}1463844797178130\dot{5}$
11	$\underline{2.71828\dot{1}82}61984928651595\dot{3}$
12	$\underline{2.718281828}2861685639463417241195018972796750574528352306130083907861 69$
13	$\underline{2.7182818284}467590023145578701134256689812245367800923356478912034467 59$
14	$\underline{2.71828182845}822974791228759482727736695990664244632498600752569006537 3$
15	$\underline{2.71828182845}899446428546957647486748015848544949074049603150132250661 4$
16	$\underline{2.71828182845904}225905879345032784186223339662493101646540799979953419 1$
17	$\underline{2.718281828459045}070516047795848605061178979635251032698900735004065225$
18	$\underline{2.7182818284590452}2670811748171086968334262313582436693409477584876139 4$
19	$\underline{2.71828182845904523}4928752728335199400298604372696647683315514840587508$
20	$\underline{2.71828182845904523}5339784490666415886146403434540261720776551790178813$

表の値の欄で数値に下線を施しておいたところを見ると、n をあげていくと次第に下線部分の数字が固定化されていくのがわかる。e の値を知りたければ、n の値を大きくしていくと好きなだけ正確な値に近い近似値が求められるだろう。これ以上 e の値を詳しく求めていくことはしないが、

$$
e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724077\cdots
$$

である（上の実際計算にはフリーウェアーの数式計算処理ソフト Maxima を利用した)。

3 【三角関数とテイラー展開】関数方程式

(2) をテイラー展開で示すために、三角関数のテイラー展開を考える必要がある（微分積分無しに)。そこで、関数方程式を利用することを考えた。現段階で一番スマートに行きそうだと思うのが、次の命題である。

命題 1.

恒等的には 0 でない次の 2 つの式

$$s(x) = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \cdots + s_n x^n + \cdots \tag{14}$$
$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{15}$$

が次の 2 式を満たすとき（x, y の恒等式という意味で)、

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y) \tag{16}$$
$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y) \tag{17}$$

$s_1 = p$ として以下のことが成り立つ

$$s_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, p^{2n+1} \qquad , \qquad s_{2n} = 0 \tag{18}$$
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, p^{2n} \qquad , \qquad c_{2n+1} = 0 \tag{19}$$

【証明】

$$s(x-y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\, {}_kC_i\, s_k\, x^i y^{k-i} = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} (-1)^j\, {}_{i+j}C_i\, s_{i+j}\, x^i y^j$$

$$s(x)c(y) = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{\infty} s_i c_j x^i y^j$$

であり、s と c の交換、x と y の交換をすることで、(16),(17) の式の $x^i y^j$ の項の係数は簡単に比較でき、

$$(-1)^j\, {}_{i+j}C_i\, s_{i+j} = s_i c_j - c_i s_j \tag{20}$$
$$(-1)^j\, {}_{i+j}C_i\, c_{i+j} = c_i c_j + s_i s_j \tag{21}$$

を得る。

(20),(21) で $i = j = 0$ の場合を考えると、(20) から $s_0 = 0$ がわかり、(21) からは $c_0 = {c_0}^2$ となり $c_0 = 0, 1$ がわかる。ここで、c_0 とすると、0 以上の任意の整数 n について、$s_n = c_n = 0$ となり、恒等的に 0 となってしまうので、$c_0 = 1$ である。

$$s_0 = 0 \quad , \quad c_0 = 1 \tag{22}$$

次に、$s(0) = s_0 = 0$, $c(0) = c_0 = 1$ に注意して、(16),(17) において $x = 0$ を代入すると、y の恒等式

$$s(-y) = -s(y) \quad , \quad c(-y) = c(y)$$

が得られる。s, c が偶関数・奇関数であることを示しているが、これを (14),(15) で考えて、(18),(19) それぞれの第 2 式が成り立っていることがわかる。

(18),(19) それぞれの第 1 式については、帰納法で示す。

$n = 0$ のとき (18),(19) それぞれの第 1 式は明らかに成り立っている。$n = k$ のときに (18),(19) それぞれの第 1 式が成り立っていると仮定して、$n = k + 1$ の時も成り立っていることを示せばよい。(21) で $i = 2k + 1$, $j = 1$ の場合を考えると、

$$c_{2k+2} = \frac{1}{-\,{}_{2k+2}C_{2k+1}}\, s_{2k+1}\, s_1 = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+2)!} p^{2k+2} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} p^{2k+2}$$

であり、確かに (19) の第 1 式は $n = k + 1$ の時も成り立っている。

(18) の第 1 式も同様にして $n = k + 1$ の時も正しいことがわかる（自分でやってみること）。

以上から、(18),(19) が (16),(17) の必要条件であることがわかった。

次に、(18),(19) であるときに、(20),(21) が成り立つことを示せば、(18),(19) が (16),(17) の十分条件であることもわかる。

i, j が共に偶数つまり、$i = 2m, j = 2n$ のとき、(18),(19) より $s_{2m} = s_{2n} = s_{2(m+n)} = 0$ なので、(20) は明らか。(21) について、

$$\begin{aligned}
c_i c_j + s_i s_j &= \frac{1}{(2m)!} \cdot \frac{1}{(2n)!}\, p^{2(m+n)} \\
(-1)^j\ {}_{i+j}C_i\, c_{i+j} &= {}_{2(m+n)}C_{2m}\, c_{2(m+n)} \\
&= \frac{\{2(m+n)\}!}{(2m)! \cdot (2n)!} \cdot \frac{1}{\{2(m+n)\}!} p^{2(m+n)} \\
&= \frac{1}{(2m)!} \cdot \frac{1}{(2n)!}\, p^{2(m+n)}
\end{aligned}$$

となり、(21) は示された。

i, j が共に偶数以外のとき、つまり $i = 2m, j = 2n + 1$ のときや、$i = 2m + 1, j = 2n$ のときや、$i = 2m + 1, j = 2n + 1$ のときのそれぞれの場合についても、今と同様に簡単に正しいことが示される。

よって、(18),(19) は (16),(17) の必要十分条件である。よって、命題は示された。（証明終わり）

命題から、

$$s(x) = px - \frac{1}{3!}\,(px)^3 + \frac{1}{5!}\,(px)^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(px)^{2n+1} + \cdots \tag{23}$$

$$c(x) = 1 - \frac{1}{2!}\,(px)^2 + \frac{1}{4!}\,(px)^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(px)^{2n} + \cdots \tag{24}$$

ここで、(23),(24),(12) をよく見ると、何か似ていることに気づく。$p = 1$ として (23),(24),(12) を書き並べると

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots \tag{25}$$

$$s(x) = x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + \cdots \tag{26}$$

$$c(x) = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,x^{2n} + \cdots \tag{27}$$

$+, -$ を度外視すると (25) の奇数番目の項は (27) の項と、(25) の偶数番目の項は (26) の項と一致している。しかも、$s(x), c(x)$ のどちらも $+, -$ が交互に現れている。これは、i の累乗を次々に

計算した経験があれば気づくことがあり、次の計算をしてみたくなる。

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \frac{1}{4!}(ix)^4 + \frac{1}{5!}(ix)^5 + \cdots \\
&= (1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 - \cdots) + i\,(x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \cdots) \\
&= c(x) + i\,s(x) \qquad (28)
\end{aligned}
$$

$p = 1$ としたときの $s(x), c(x)$ は (28) を満たすだけではない。

実は、$[Ds](x) = c(x), [Dc](x) = -s(x)$ を満たす p の必要十分条件が $p = 1$ なのである。このような $s(x), c(x)$ は $s(x) = \sin x, c(x) = \cos x$ であることが知られている。つまり、

$$e^{ix} = \cos x + i\,\sin x$$

となり、これはオイラーの公式と呼ばれる有名な公式である。

オイラーの公式で $x = \pi$ と置くと、

$$e^{i\pi} = -1$$

となる。

4　【終わりに（今後の課題・余談）】

4.1　今後の課題

関数方程式 (16),(17) を満たす関数 $s(x), c(x)$ が、$p = 1$ のときに $\sin x, \cos x$ になることを導きたいが、現段階ではその方法を思い浮かばない。微分を想定して条件 $[Ds](x) = c(x)$ を加えると、(23) から

$$[Ds](x) = p\left(1 - \frac{1}{2!}\,(px)^2 + \frac{1}{4!}\,(px)^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(px)^{2n} + \cdots\right) = p\,c(x)$$

となり、$[Ds](x) = c(x)$ から $p = 1$ が得られる。しかし、これだと $[Ds](x) = c(x)$ が突拍子もなく出てきた条件となり面白くない。

4.2　余談 1：あって良かった複素数（関数方程式）

関数方程式 (16),(17) を、ベキ級数展開できるものの中で求めたが、次のような方法があるので紹介しておく（複素解析の領域に少し入ってしまうが、当初書いたように式をいじくって遊ぶ境地でいきたい)。恒等的に 0 となる関数は面白くないので、考えないことにしておく。以下紹介する解法は、

朝倉書店　発行　基礎数学シリーズ１５　函数方程式概論　桑垣煥　著

の、第 6 章 連立函数方程式 6.1 連立加法方程式 6.1.2 3 角函数 にある。

$x = y = 0$ とすることで、$s(0) = 0, c(0) = 1$ がわかる。これから、$x = 0$ とすることで、$s(-y) = -s(y), c(-y) = c(y)$ がわかる。さらにこれから、加法定理

$$
\begin{aligned}
s(x+y) &= s\,(x - (-y)) = s(x)c(-y) - c(x)s(-y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \\
c(x+y) &= c\,(x - (-y)) = c(x)c(-y) + s(x)s(-y) = c(x)c(y) - s(x)s(y)
\end{aligned}
$$

をえる。ここで、$E(x) = c(x) + i\,s(x)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
E(x+y) &= c(x+y) + i\,s(x+y) \\
&= c(x)c(y) - s(x)s(y) + i\,s(x)c(y) - i\,c(x)s(y) \\
&= \{c(x) + i\,s(x)\}\{c(y) + i\,s(y)\} \\
&= E(x)E(y) \\
\therefore \quad E(x+y) &= E(x)E(y) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

この後は (29) から、$E(x) = \{E(1)\}^x$ が得られ、最終的に、a を複素数の定数として

$$
s(x) = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2i}\ ,\ c(x) = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2i} \qquad (30)
$$

の形の関数が解となる。このうち、実数値関数になるのは a を実数の定数として

$$
s(x) = \sin ax\ ,\ c(x) = \cos ax
$$

の形となる。

なぜ最初から加法定理の形

$$
s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y)\ ,\ c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y) \qquad (31)
$$

ではなく、(16),(17) を使ったか。もし、(31) の方を使っていたら、解は a, b を実数の定数として

$$
s(x) = e^{ax}\sin bx\ ,\ c(x) = e^{ax}\cos bx
$$

となる。つまり、$s(x), c(x)$ がそれぞれ奇関数、偶関数の保証が無くなり、無限級数での係数比較が難しくなると思ったのが理由である。

4.3　余談 2：もし生徒と一緒に楽しむなら

$s(x), c(x)$ の関数方程式としてどのようなものを採用するかについて、あれこれやってみるのはたのしいと思う。$\{s(x)\}^2 + \{c(x)\}^2 = 1$ はどうだろうか、とか 2 倍角の公式 $c(2x) = 2\{c(x)\}^2 - 1$ は $c(x)$ のみの方程式だから、これから $c(x)$ がまず求まって、その後 $s(2x) = 2s(x)c(x)$ から $s(x)$ も求まるのではないか、・・・。いろいろアイデアを出しながら、うまくいかないことに気がついて、別のアイデアを出していくのは、楽しい作業であり、本来の課題研究になるように思う。