北数教“第 99 回数学教育実践研究会”

感覚に合わない事実

レポート

平成 28 年 11 月 26 日 (土)

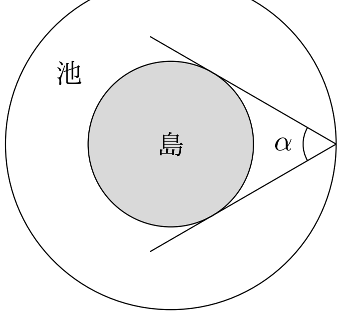
アスティ４５ビル　１６階　ＡＣＵ

千歳科学技術大学　安田富久一

【 円形の池に浮かぶ中の島の形について 】

円形の池 C の中に島 R が存在する。池の縁の各点でこの島 R を眺めたところ、島の両端を見晴らす角度は α で、常に同じであった。この島はどんな図形か?

同心円が答えだ、と直感できる。円以外はなさそうな気もするが、自信を持って同心円だけだ、と断定できるだろうか。答えは、違う場合もある、というのが事実。



【 円以外に存在する実例 】

数学の泉で中村文則先生が

http://izumi-math.jp/F_ Nakamura/kotewaza/ball/ball.htm

に書いていらっしゃる「楕円と直線の関係のちょっとした小手技」に紹介されているものになるが、解と係数の関係が見事に決まる問題がある。

＜問題＞　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の異なる 2 点での接線が直交するときの交点の軌跡を求めよ。

＜解答＞　楕円上の 2 点を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。この 2 点が楕円上にある条件は

$$\frac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

$$\frac{{x_2}^2}{4}+{y_2}^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

この 2 点でのそれぞれの接線の方程式は

$$\frac{x_1x}{4}+y_1y=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{③}$$

$$\frac{x_2x}{4}+y_2y=1 \quad \cdots\cdots\cdots \text{④}$$

である。この 2 直線が直交する条件は

$$x_1x_2+16y_1y_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑤}$$

である。①〜⑤から x_1, x_2, y_1, y_2 を消去して x, y の方程式を得れば軌跡が得られる。

③, ④から $x_1=\frac{4}{x}(1-y_1y)$, $x_2=\frac{4}{x}(1-y_2y)$ であり（$x \neq 0$ として議論を進めていく）、これを①, ②及び⑤に代入する。

①に代入すると

$$\frac{4(1-y_1y)^2}{x^2}+{y_1}^2=1$$

$$\therefore \quad (x^2+4y^2){y_1}^2-8yy_1+4-x^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑥}$$

が得られる。②に代入して得られる式は⑥で添え字の 1 を 2 にすればよいから、

$$(x^2+4y^2){y_2}^2-8yy_2+4-x^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑦}$$

となる。⑤に代入すると、

$$\frac{16}{x^2}(1-y_1y)(1-y_2y)+16y_1y_2=0$$

$$\therefore \quad 1-(y_1+y_2)y+(x^2+y^2)y_1y_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑧}$$

⑥, ⑦から y_1, y_2 を求めて⑧に代入すると軌跡が得られることになる。

⑥, ⑦から y_1, y_2 は次の t の 2 次方程式

$$(x^2+4y^2)t^2-8yt+4-x^2=0 \quad \cdots\cdots\cdots \text{⑨}$$

の 2 つの解。解と係数の関係 $y_1+y_2=\frac{8y}{x^2+4y^2}$, $y_1y_2=\frac{4-x^2}{x^2+4y^2}$ を⑧に代入して式を整理すると

$$x^2(5-x^2-y^2)=0 \qquad \therefore\ x^2+y^2=5：原点中心半径 5 の円 \quad (答)$$

$x=0$ のときの状況を調べておかないと厳密ではないが、それは $(x,y)=(0,\pm\sqrt{5})$ の 2 点であることが①〜⑤からすぐわかる。

今の問題から、池が $x^2+y^2=5$ であり、島が $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ という楕円のとき、$x^2+y^2=5$ の池の縁から島を見ると、いつも見晴らす角度 α は 90° であることになる。

【 注 】　この問題は一般には次のようになる。

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の異なる 2 点での接線が直交するときの交点の軌跡は、原点中心半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円である（この円は元の楕円の準円と呼ばれているものになる）。

この楕円と準円に関しては受験テクニックとして、よく紹介されている。軌跡としてではなく、逆に池の縁から島を見た角度のデータから島の形を突きとめるという視点でこの問題を考えると、かなり壮大な話しが続く。結果の概略だけを紹介しておく。

【 円形の池に浮かぶ中の島の形について 】

(1) $\frac{\alpha}{\pi}$ が無理数のとき、島は同心円に限る。

(2) $\frac{\alpha}{\pi}$ が有理数 $\frac{m}{n}$（既約分数）のとき

(i) m,n が共に奇数ならば、島は同心円に限る。

(ii) m,n の片方が偶数ならば、同心円以外の（円以外の）図形がある。

これは、数学セミナーの連載記事

「円形の池に浮かぶ中の島の形について」　著者：松浦重武（京都大学）

の連載第 1 回目（1981.08）に書かれていた定理。本連載は、後日談を含め 50 数回にもなる連載で、連載中に未解決問題も含まれる連載である。

【 感覚に合わない事実 】

タイトルにした“感覚に合わない事実”について、生徒の感覚に合わないと思われるサンプルを集めて見た。何かの折に、生徒の関心を引く話しになるかも知れない。

(1)　円形の池に浮かぶ中の島を見たとき、どの池の縁から見ても一定の角度で見えたら島は同心円である。
（上記に結果を書いた）

(2)　原点から光を発し、格子点にぶつかれば光は反射されるとする。永遠に反射されずに飛んで行ったきりになることはない。
（簡単にわかって欲しいけれど、意外といつか必ずぶつかって反射して戻ってくると思う生徒がいる）

(3)　有理数の方が無理数より多い。
（有理数の方が多いと思う生徒がいる。知っている無理数が多くないからだろう）

(4)　数列 $\{a_n\}$ はどの項も有理数である。このとき、a_n が極限値を持つなら、その値も有理数である。
（無理数の無限小数表示を知っていても、上記のように答える生徒がいる）

(5)　どんな連続関数も微分可能で、いくつかの特異点だけが例外であり得る。
（リーマンとワイエルシュトラス以前にはそう信じられていた。ワイエルシュトラスはこのようなことを話している『ガウス・コーシー・ディリクレのように、この分野のあらゆるこ

とを非常に厳格に批判する習慣のあった数学者の著述においてさえ、私の知る限り、そうではない意見を意味するどんな表現も見受けられなかった』

どの点でも微分不可能な連続関数がある。最初の発見者は上記ワイエルシュトラス。その後、多くの数学者がいろいろな例を発見している。高木貞治の発見になる高木関数もある。後に、高木関数はブラマンジェ関数と名付けられた：ハイラー・ワナー著「解析教程」III.9「連続関数の二つの定理」 を参照）

ワイエルシュトラスが考えた関数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x) \quad 但し、b < 1\,,\, ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

高木関数：数学の泉に早苗雅史先生が書いていらっしゃる次のページを参照

http://izumi-math.jp/sanae/MathTopic/takagi/takagi.htm　）

(6)　$y = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ は連続関数ではない。

（日常生活で使う言葉の感覚と、数学で使う言葉の違い：連続関数の“連続”を“繋がっている”と混同）

(7)　確率が 0 であるということは、その事象が決して起こらない、ということである。

（高校で学習する全体集合が有限集合のときには正しいが、無限集合になると起こりうることもある）

参考文献

1　松浦重武：「円形の池に浮かぶ中の島の形について」
数学セミナーの連載第 1 回目（1981.08）

2　中村文則：「楕円と直線の関係のちょっとした小手技」
http://izumi-math.jp/F_ Nakamura/kotewaza/ball/ball.htm

3　早苗雅史：「いたるところ微分不可能な関数」
http://izumi-math.jp/sanae/MathTopic/takagi/takagi.htm

4　E．ハイラー／G．ワナー：「解析教程 下」（蟹江幸博　訳）
シュプリンガー・フェアラーク東京（1997.11.26 発行）