北数教“第97回数学教育実践研究会”

芳賀定理（折り紙）について
＜もし折るなら···＞

レポート

平成28年6月4日 (土)

北海道大学　情報教育館３Ｆスタジオ型多目的中講義室

千歳科学技術大学　安田富久一

【 きっかけ 】

「折り紙と数学、この世界に芳賀の定理という有名な定理がある」と言って、一人の学生が折り紙の本（前川 [1]）を持って見せに来てくれた。以前、本研究会でも何かの折に聞いたことがあったように記憶しているが、よく覚えていない。折角見せに来てくれたので、本を借りてその箇所を見ると、下の枠の内容が書かれている（文章や図はその本のものではなく、私なりの書き方にしてある）。

芳賀の第 1 定理　**3 等分点を折り紙で**

正方形の折り紙の頂点 A を、A が乗っていない辺の中点 A' に重ねる。右図で言うと、図 1 の折り紙があり、図 1 の A を A' に重ねるように点線で折ると図 2 になる（元の辺 AB が折った後に辺 $A'B'$ になっている）。

このとき、辺 $A'B'$ と折り紙の左端の辺との交点を P とすると、点 P は元の折り紙の左端の辺の 3 等分点になっている。

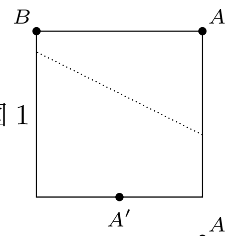
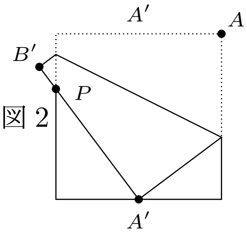
図 1


図 2


証明は非常に簡単にできた（一応証明は最後に付けておく）。

【 動機 】 折り紙なんだから！

証明した後、こんなことを考えた。

> 実際に紙を折るということを考えた場合、“A を A' にきっちり重ねられる”ということはまったく期待できない。A が A' と少し違った場所に置かれた場合、C は 3 等分点からどれくらい離れた場所に出来るのだろうか

「そんなに目くじら立てなくてもいいではないか。コンパスで円を描くということを考えた場合、針をちょうど置きたい場所に確実に置くこともまったく期待できないではないか」という声が聞こえてきそうだが、考えてみたくなった。

(1) どれくらい狂うのか、

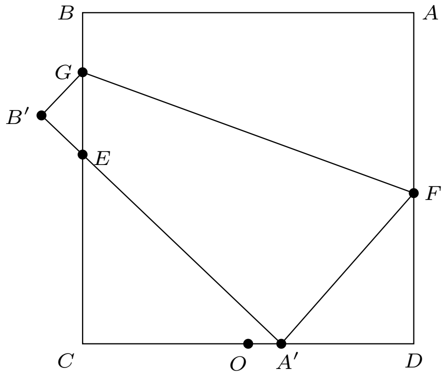
(2) 我慢できるくらいの狂い方なのか

(3) 我慢できる程度の狂い方に収まるためには、A の狂い方はどの程度の狂いなのか

(2),(3) は個人的な要素（A さんはその程度の狂いは我慢できないが B さんは我慢可能なレベルだとか、心理学的にみてこれくらいが許される狂いの範囲だとか）なども含まれ、私の手に負えないのは明らか。そこで、(1) に的を絞って今回のレポートをしたい。

【 課題 1 】 折ったときに頂点が辺の中点から横へ少しずれた時の 3 等分点の誤差を調べる。

1 辺の長さが 1 の折り紙用紙 $ABCD$ があり、A を CD の中点 O に重なるように紙を折る作業について考える。そして、実際にその作業で O からちょっと横にずれた点 A' に A が重なったとしよう。紙を折ったときの点 B の移動後の点を B'、2 線分 $A'B'$ と BC との交点を E とする。また、紙を折ったときに出来る折り目の線分を図のように FG とする。



ここで、O から A' へのずれの長さを h としたとき CE の長さが h とどんな関係にあるかを調べる。

線分 CE の長さを h を用いて表せば、課題 1 の誤差を調べられる。そこで、次の問題を解こう。

【 問 1 】

(1) 線分 CE の長さを e とし、e を h で表せ。

(2) 3 等分点と E のずれ（誤差）$e(h) = e - \frac{2}{3}$ を求めよ。

(3) 課題 1 の考察をせよ。

【 問 1 の解答 】

(1) $e = \dfrac{4h-2}{2h-3}$ ………… ①

(2) $e(h) = \dfrac{8h}{6h-9}$ ………… ②

(3)（どうせ）ずれるんやったら左に。

【 問 1 の解答の証明 】

(1) $A'F = AF = 1 - f$ かつ $\triangle A'DF$ が直角三角形であるから三平方の定理より、

$$f^2 + (\frac{1}{2} - h)^2 = (1-f)^2 \quad \therefore\ f = -\frac{4h^2 - 4h - 3}{8} \quad \cdots\cdots ③$$

$\triangle A'CE$ と $\triangle A'DF$ は相似なので $A'C : CE = FD : DA'$ より、

$$ef = (\frac{1}{2} + h)(\frac{1}{2} - h) \quad \therefore\ e = -\frac{4h^2 - 1}{4f} \quad \cdots\cdots ④$$

③, ④より、$e = \frac{2(4h^2-1)}{4h^2-4h-3} = \frac{4h-2}{2h-3}$ なので、示された。

(2) ①より、$e(h) = \frac{8h}{6h-9}$ を得る。

(3) ここで、1 辺 10 ㎝ の折り紙で A' が O から 1 ㎜ 狂って折ってしまった場合の誤差を調べてみよう。この場合、図形の相似性から、$h = \frac{1}{100}$ となる。

$$\left|e(\tfrac{1}{100})\right| = \frac{4}{447} = 0.0089485458612975$$

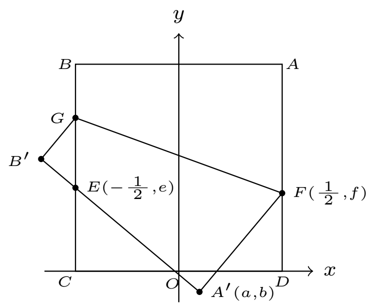
$$\left|e(-\tfrac{1}{100})\right| = \left|-\frac{4}{453}\right| = 0.0088300220750552$$

$$\left|e(\tfrac{1}{100})\right| - \left|e(-\tfrac{1}{100})\right| = 0.0001185237862423\ (> 0)$$

よって、A' が $\frac{1}{100}$ 左にずれたときの方が右にずれたときよりもおよそ 0.001 だけ 3 等分点からのずれが少ない。もっとも、0.0001 は 0.1 ミクロン相当で、気になるかどうかは不明だが。

【 課題 2 】 折ったときに頂点が辺の中点から少しずれた時の 3 等分点の誤差を調べる。

$A'(a,b)$ として点 E の座標 $E(-\frac{1}{2},e)$ の e を a,b で表す問題を考えて考察する。次の問題を解こう。



【 問 2 】

(1) e を a,b で表せ。

(2) 3 等分点と E のずれ（誤差）$e(a,b)=e-\frac{2}{3}$ を求めよ。

(3) 課題 2 の考察をせよ。

【 問 2 の解答 】

(1) $e=b-\dfrac{2(b-1)(4a^2-1)}{(2a-1)^2-4(b-1)^2}$ ………………………… ⑤

(2) $e(a,b)=\dfrac{12(b^3+ba^2)-4(8b^2-3ba+4a^2)+(19b-8a)}{3\{4(b^2-a^2)-4(2b-a)+3\}}$ ………………… ⑥

(3) この式のまま何かの考察をするのは大変である。そこで、

(i) まっすぐ縦にずれたらどうか調べてみる

$e(0,h)$ を考えることになる（問題 1 の $e(h)$ は $e(h)=e(h,0)$）。

(ii) A' が O から偏角 θ の方向にずれようとした場合の誤差の増大率を調べる。

【 問 2 の解答の証明 】

(1) $A'F=AF=1-f$ かつ $A'F=\sqrt{(\frac{1}{2}-a)^2+(f-b)^2}$ より、

$$(\frac{1}{2}-a)^2+(f-b)^2=(1-f)^2 \quad \therefore\ f=\frac{(2a-1)^2+4(b^2-1)}{8(b-1)} \quad \cdots\cdots ⑦$$

$A'F\perp A'E$ なので $\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{A'E}=0$ より、

$$(\frac{1}{2}-a)(-\frac{1}{2}-a)+(f-b)(e-b)=0 \quad \therefore\ e=b-\frac{4a^2-1}{4(f-b)} \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑧の f に⑦を代入すると $e=b-\frac{2(b-1)(4a^2-1)}{(2a-1)^2-4(b-1)^2}$ なので示された。

(2)
$$e(a,b)=e-\frac{2}{3}=\frac{4(b^3+ba^2)-4(2b^2-ba+2a^2)+b+2}{4(b^2-a^2)-4(2b-a)+3}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{12(b^3+ba^2)-4(8b^2-3ba+4a^2)+(19b-8a)}{3\{4(b^2-a^2)-4(2b-a)+3\}}$$

なので、示された。

【 問 2(3) 考察について 】

(i) $e(0,h)=\dfrac{12h^3-32h^2+19h}{12h^2-24h+9}$ であるから、

$$\left|e(0,\tfrac{1}{100})\right|=\frac{46703}{2190300}=0.021322649865315$$
$$\left|e(0,-\tfrac{1}{100})\right|=\left|-\frac{5367}{256700}\right|=0.020907674328009$$
$$\left|e(\tfrac{1}{100})\right|-\left|e(-\tfrac{1}{100})\right|=0.000414975537306\ (>0)$$

となる。縦にずれる場合は下方向（紙の外）にずれた方が 3 等分点からのずれが少ない。

さらに、$\left|e(0,\frac{1}{100})\right|=0.021322649865315$ は $\left|e(\frac{1}{100})\right|=0.0089485458612975$ の約 2.4 倍である。このことから、ずれるなら、なるべく縦のずれに神経をとがらせ、横のずれはちょっとくらい目をつぶるのが良さそうである。

(ii) $e(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$= \frac{12(\sin\theta)r^3 - 4(8\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta)r^2 + (19\sin\theta - 8\cos\theta)r}{12(\sin^2\theta - \cos^2\theta)r^2 - 12(2\sin\theta - \cos\theta)r + 9}$$

である。題意は $\dfrac{de}{dr}(0,\theta)$ を求めることに相当する。商の導関数の公式から $\dfrac{de}{dr}(0,0)$ の分母と分子は、

$$\text{分母} = \left\{12(\sin^2\theta - \cos^2\theta)r^2 - 12(2\sin\theta - \cos\theta)r + 9\right\}^2$$

$$\begin{aligned}\text{分子} = \ & \left\{36(\sin\theta)r^2 - 8(8\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta)r + (19\sin\theta - 8\cos\theta)\right\} \times \\ & \left\{12(\sin^2\theta - \cos^2\theta)r^2 - 12(2\sin\theta - \cos\theta)r + 9\right\} \\ & - \left\{12(\sin\theta)r^3 - 4(8\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta + 4\cos^2\theta)r^2 + (19\sin\theta - 8\cos\theta)r\right\} \times \\ & \left\{24(\sin^2\theta - \cos^2\theta)r - 12(2\sin\theta - \cos\theta)\right\}\end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{de}{dr}(0,\theta) = \frac{19\sin\theta - 8\cos\theta}{9}$$

となる。$\dfrac{de}{dr}(0,\theta) = 0$ となるのは、$\tan\theta = \frac{8}{19}$ のときである。このときは、3 等分点から変化しようとしないことになり、ずれが大きく現れないという期待が持てる。$\tan\theta = \frac{8}{19}$ となる角度は度数法で約 22.8 度である。

ご安心下さい！ちゃんとはいてます（ちゃんと 3 等分点に入ってます）

約 22.8 度、傾きで $\tan\theta = \frac{8}{19}$ の方向にずれようとしたとき、3 等分点がずれたがらないということは、A' が O からずれても E が 3 等分点になっている場合があり、それが原点 O を通る曲線でその曲線の原点での接線の傾きが $\tan\theta = \frac{8}{19}$ であろうと推測できる。調べてみよう。

【 課題 3 】 E が 3 等分点となるのは A' が何処にあるときか調べ、考察せよ。

【 課題 3 の解答 】

問 2 (2) の解答⑥から、

$$12(b^3 + ba^2) - 4(8b^2 - 3ba + 4a^2) + (19b - 8a) = 0$$

$$\therefore \quad a = \frac{-3b + 2 \pm 2(b-1)\sqrt{-9b^2 + 18b + 1}}{6b - 8} \quad \cdots\cdots ⑨$$

この 2 つのうち、原点を通る方は

$$a = \frac{-3b + 2 + 2(b-1)\sqrt{-9b^2 + 18b + 1}}{6b - 8}$$

$$\frac{da}{db} = \frac{3\sqrt{-9b^2 + 18b + 1} - (27b^3 - 99b^2 + 117b - 35)}{\sqrt{-9b^2 + 18b + 1}(9b^2 - 24b + 16)}$$

となる。ここで、$b = 0$ のときの微分係数は $\frac{38}{16} = \frac{19}{8}$ となり、課題 2 で推測したことは正しい。

この課題 3 の解答を書いていて、また調べてみたくなるようなことが出てきた。⑨の根号だ。この根号内が 0 以上になる状況でしか 3 等分点が出てこないということになる。

$$-9b^2 + 18b + 1 \geqq 0 \quad \therefore \ \frac{3 - \sqrt{10}}{3} \leqq b \leqq \frac{3 + \sqrt{10}}{3}$$

である。この範囲の境界 $b = \dfrac{3 \pm \sqrt{10}}{3}$ が折り紙でいえば何に相当するのか、考えると面白いかも知れない。

【 オリガミクス（芳賀和夫先生） 】 折り紙と数理

今回レポートで取り上げた芳賀の定理の発見者は、芳賀和夫先生である。オリガミクスの創始者である芳賀先生は、ご自身のホームページである『 芳賀サイエンスラボ 』

https://hagalab.wordpress.com/origamics/

のトップページで“オリガミクスの真髄は，紙を折って数理を楽しむところにあり、作品づくりが目的ではない。”と語っている（原文は本レポートの 5 ページの【オリガミクスについて】に記載しておいた)。実際に折り紙をすることを芳賀先生は念頭に置いているわけではなく、数理的な様々な現象が紙を折る中で出現することに興味関心を抱いていらっしゃる。

このことからすると、今回の私のレポートは、実際に紙を折るということにこだわった問題設定であり、芳賀先生のオリガミクスの範疇から離れての興味関心である。学問世界の幾何学ではなく、実際に紙を折るという視点で数学遊びを楽しんだ。

【 オリガミクスについて 】（芳賀氏の言葉）

オリガミクスってなんだ？

「折り紙」は，日本の伝承文化です。ふつう，正方形の色のついた紙を折って，折りづる，奴さん，から始まって，いろいろな動物，花，家具，乗り物，などなどを作って遊びますね。もちろん，遊びの域を脱して，複雑，巧緻，さらには芸術的な作品を作り上げる人もいます。

「オリガミクス」では，たいていの場合，そのような面白い，美しい作品は生まれ出ません。同じ紙を折っても，あとには，折り線がいっぱいついた，まるでゴミみたいなものが残るだけです。時には正多角形とは正多面体などの幾何図形作品をつくりあげることもありますが，オリガミクスの真髄は，「紙を折って数理を楽しむ　Fold Paper and Enjoy Math」というところにあります。作品づくりが目的ではないのです。

参考文献

[1] 前川淳『本格折り紙　入門から上級まで』日貿出版社 (2013)