北数教“第 91 回数学教育実践研究会”

反省することの大切さ
今夜はスッキリ眠れる背理法

レポート

平成 26 年 11 月 29 日 (土)

アスティ４５ビル

千歳科学技術大学　安田富久一

【はじめに】

(1)　反省することの大切さ（【問題 1】,【問題 2】）

第 89 回の本会研究会で“知らないうちにあなたも加害者に・・・”タイトルのレポート紹介をした。マニュアル墨守の生徒が、きっちりと正しいかどうかの判定をしないで、形式的にマニュアル通りすると正しい答えが出て、形式通りしなければ間違ってしまう、というマニュアル墨守（半ロボット）人間製造の怖さを話した。

ところが、私自身が何の反省もないままマニュアル墨守をしていた事例に気づいた。この事例に気づいた後、数名の先生に尋ねてみて、私と同じような状況であることがわかったので、その事例を紹介しておきたいと思う（【問題 2】）。

加えてマニュアル理解だけからの脱皮の大切さの例を紹介したい。【問題 1】

(2)　今夜はスッキリ眠れる背理法（【問題 3】）

ある問題を解こうとしていて、$\lim_{n\to\infty} n\theta$ の挙動を調べたくなった。θ が π の有理数倍の時はすぐにわかるが、無理数の場合がわかりそうでいてなかなかすっきりしない。何かヒントになることがないか本をいくつか調べてみて、発見した。その内容を紹介したい。

【 問題 1 】

$\alpha = \cos\dfrac{2}{5}\pi + i\sin\dfrac{2}{5}\pi$ として、以下の問いに答えよ。

(1) α は方程式 $x^5 = 1$ の解であることを示せ。

(2) 方程式 $x^5 = 1$ の解を求めよ。

(3) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ を実数の範囲で因数分解せよ。

【 解答 1 】

(1) $\quad \alpha^5 = \left(\cos\dfrac{2}{5}\pi + i\sin\dfrac{2}{5}\pi\right)^5 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

(2) $\quad (\alpha^n)^5 = \left(\alpha^5\right)^n = 1$ であり、α^n $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ は 0 以上 2π より小の範囲での偏角が互いに相異なる 5 個の複素数なので、複素数として互いに相異なっている。

よって、求める解は

$$\begin{aligned} x &= \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \\ &= 1, \cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi, \cos\frac{4}{5}\pi + i\sin\frac{4}{5}\pi, \cos\frac{6}{5}\pi + i\sin\frac{6}{5}\pi, \cos\frac{8}{5}\pi + i\sin\frac{8}{5}\pi \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= \frac{x^5 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)\left(x-\alpha^1\right)\left(x-\alpha^4\right)\left(x-\alpha^2\right)\left(x-\alpha^3\right)}{x-1} \\ &= \left\{x^2 - 2\left(\cos\frac{2}{5}\pi\right)x + 1\right\}\left\{x^2 - 2\left(\cos\frac{4}{5}\pi\right)x + 1\right\} \end{aligned}$$

【 なんで (1) 出来へんのん $\cdots$。ひょっとして $\cdots$ もしかして ??? 】

問掛： $x = 1$ は $x^2 - 3x + 2 = 0$ の解か？

回答： 解です。

問掛： なんで解やいうことわかる？

回答： 因数分解して解が $x = 1, 2$ と求まります。
そして、この中に $x = 1$ があるからです。

【 問題 **2** 】

2 次方程式 $x^2-2x+3=0$ の 2 つの解を α, β とする。

このとき、$\alpha+1\,,\,\beta+1$ を 2 つの解にもつ 2 次方程式を求めよ。

【解答】

解と係数の関係より $\begin{cases} \alpha+\beta=2 \\ \alpha\beta=3 \end{cases}$ である。

$$\begin{cases} (\alpha+1)+(\beta+1)=\alpha+\beta+2=4 \\ (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=6 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x^2-4x+6=0$$

【この解答はどうでしょう】

$$(x-1)^2-2(x-1)+3=0$$

【 問題 **3** 】　θ が π の整数倍でなければ、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin n\theta$ は発散することを示せ。

【悩み】

(1) $\theta=\dfrac{p}{q}\pi$　(p, q は互いに素で $q \geqq 2$) のときは簡単に発散することがわかる。

- $n=aq+b$（a を q で割った商を a、余りを b とした）とする。
- $|\sin n\theta| = \left|(-1)^{ap}\sin\dfrac{np\pi}{q}\right| = \left|\sin\dfrac{np\pi}{q}\right|$　($n=0,1,2,\cdots$)
- $0\,,\,\left|\sin\dfrac{p\pi}{q}\right|\,,\,\left|\sin\dfrac{2p\pi}{q}\right|\,,\,\cdots\,,\,\left|\sin\dfrac{(q-1)\pi}{q}\right|$ の繰り返し。

(2) $\theta=\omega\pi$　(ωは無理数) のときは ……

- 繰り返しはないが、ある値の近くに値が密集していきそうな気がしない。
- でも、絶対に密集していかないとどうやって保証する？
- こうなれば $\begin{cases} \text{苦しいときの神頼み} \\ \text{悩ましいときの背理法頼み} \end{cases}$

【解答】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin n\theta$ が収束したとして背理法により示す。

$$\sin(n+1)\theta-\sin n\theta = 2\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\cdot\sin\frac{1}{2}\theta$$

背理法の仮定より $n\to\infty$ のとき、左辺 $=\{\sin(n+1)\theta-\sin n\theta\}\to 0$ である。

よって、右辺 $=2\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta\cdot\sin\dfrac{1}{2}\theta\to 0$ でなければならない。

θ が π の整数倍ではないので $\sin\dfrac{1}{2}\theta\neq 0$ だから、

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta=0$$

である。よって、次のような自然数 N_n と 0 に収束する実数 ϵ_n が存在する。

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta = N_n\pi+\epsilon_n+\frac{\pi}{2}$$

このことから

$$\theta=(N_{n+1}-N_n)\pi+(\epsilon_{n+1}-\epsilon_n)$$

を得る。

$(\epsilon_{n+1}-\epsilon_n)\to 0$ なので、θ が π の整数倍でなければこの式は成立しない（矛盾）。

参考："A Course of Pure Mathematics", G.H.HARDY, Cambridge University Press
Examples XXIV（127 ページ）