北数教“第 89 回数学教育実践研究会”

あなたも知らないうちに加害者に

レポート

平成 26 年 6 月 7 日 (土)

北海道大学　情報教育館 ３Ｆスタジオ型多目的中講義室

千歳科学技術大学　安田富久一

知らないうちにあなたも加害者に・・・

1 はじめに

高校教員時代にもよく似た経験があることで、久しく記憶から遠ざかっていた事例に最近出会った。そのことを元に、数学教員になって以来ずっと気にしていることを紹介させていただきます。

2 知らないうちにあなたも加害者に

2.1 間違いレベルⅠ

【問題】$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x}\right)$ について、次の各問いに答えよ。

1. 次の等式には一ヶ所間違いがある。どの等式か式番号で答えよ。

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left\{x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right\}\quad\cdots\cdots\ (1)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2\times 1}\right)\quad\cdots\cdots\ (2)$$
$$=\lim_{x\to\infty}1\quad\cdots\cdots\ (3)$$
$$=1\quad\cdots\cdots\ (4)$$

間違っているのは　　式である

2. 正しく極限値を求めよ。

【解答】

1. $\boxed{\text{間違っているのは (2) 式である}}$

2.
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x}\right)\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+x}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x}\right)}{x+1+\sqrt{x^2+x}}\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x+1+\sqrt{x^2+x}}\\=&\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\\=&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

＜間違いの所在＞

等号 (2) で発生した間違いをしっかり見てみよう。(1) の右辺を次のように見る。

$$f(x,y)=x+1-\sqrt{x^2y}\qquad,\qquad g(x)=1+\frac{1}{x}$$
$$x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=f(x,g(x))$$

ここまで来ると、問題が見えてくる。

【命題】

2 変数関数 $f(x, y)$ 及び 1 変数関数 $g(x)$ があり、$\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ であるとする。このとき、

$$\lim_{x \to a} f(x, g(x)) = \lim_{x \to a} f(x, \alpha) \qquad \cdots\cdots (5)$$

が成り立つ。

という命題の真偽は如何に。という問題である。結果は、上の問題が示しているように、偽である。

つまり、関数の一部分をその極限値で置き換えると、元の極限値と同じ極限値が得られる保証はないということである。

極限計算について、基本的に数 III 教科書にあるのは

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$, k は定数 のとき

(i) $\lim_{x \to a} k = k$　　(ii) $\lim_{x \to a} kf(x) = k\alpha$

(iii) $\lim_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta$　　(iv) $\lim_{x \to a} \{f(x)g(x)\} = \alpha\beta$

(v) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$　　（ただし $\beta \neq 0$ のとき）

であり、これらを利用して様々な極限値を求めていく（中には、挟み撃ちの原理と呼ばれる高度なテクニックで求めることもある）。ところが、少し慣れてくると勝手な計算方法をやってしまう。そして、厄介なのは問題集や参考書の後ろの解答の値と（運良く）一致していることが多く、もっと言うと違う値になった経験がない（単純計算間違いで合わなかった場合は別）ために、自分は正しいやり方で解いていると思ってしまっているようだ。

2.2　間違いレベル II

上記解答についての次のような会話をどう思いますか。

【A：上記解答者，B：違う意見の人】

B: 2. の解答は同じ意見ですが、1. は (2) ではなく、(1) の箇所だと思います。

A: (1) の所は、lim がなくても恒等式として成立するんだから、lim を付けても当然正しいでしょう。

B: でも有理化してないじゃないですか。

A: えっ、有理化。

B: 実際にも 2. で有理化して解いているじゃないですか。

B さんは、『論理的に正しいかどうか』ではなく、『マニュアル手順と違うことをすれば間違いである』という考えを身につけてしまった、ということだと思う。センター試験で点を取らせるためにという視点だけの受験勉強しかさせないと、

知らないうちにあなたも加害者に・・・・・・

3 付録

3.1 科学的コミュニケーション能力

少し前まで科学的リテラシーという言葉をよく耳にした。その中でも、科学的コミュニケーション能力に関して、次のような問題を考えさせるのはどうでしょうか。

【問題】

次の与えられた課題に対するレポートについて、良くない点を指摘せよ。

課　題

$m^n = n^m$ を満たす自然数 m, n について、$m \neq n$ であるものを求めよ。

レポート

$\log m^n = \log n^m$ なので、$\dfrac{\log m}{m} = \dfrac{\log n}{n}$ を満たす自然数 m, n を探すことと同値である。

$y = \dfrac{\log x}{x}$ のグラフを考える。

$$y' = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

なので、増減表は次のようになる。

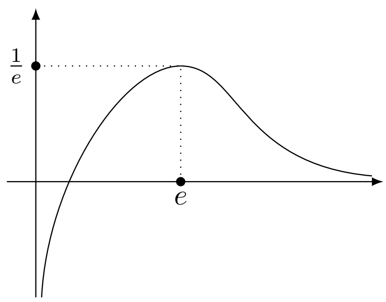
x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

さらに

$$\lim_{x \to +0} \frac{\log x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

なので、グラフは右のようになる。



よって、$n < m$ とすると $0 < n < e < m$ であることが必要。$e = 2.718\cdots$ なので、$n = 1, 2$ 以外にないことがわかる。

- $n = 1$ のとき $m^1 = 1^m$ なので、$m = 1$ となり不適。
- $n = 2$ のとき $m^2 = 2^m$ であるが、この式は $m = 4$ のとき成立している。

$n > m$ のときは、n と m の立場が変わるだけで全く同じ方程式であるから、求める自然数 m, n は

$$(m, n) = (2, 4), (4, 2)$$

である。