平成25年8月3日（土）

ベジェ曲線で楽しんだ数学

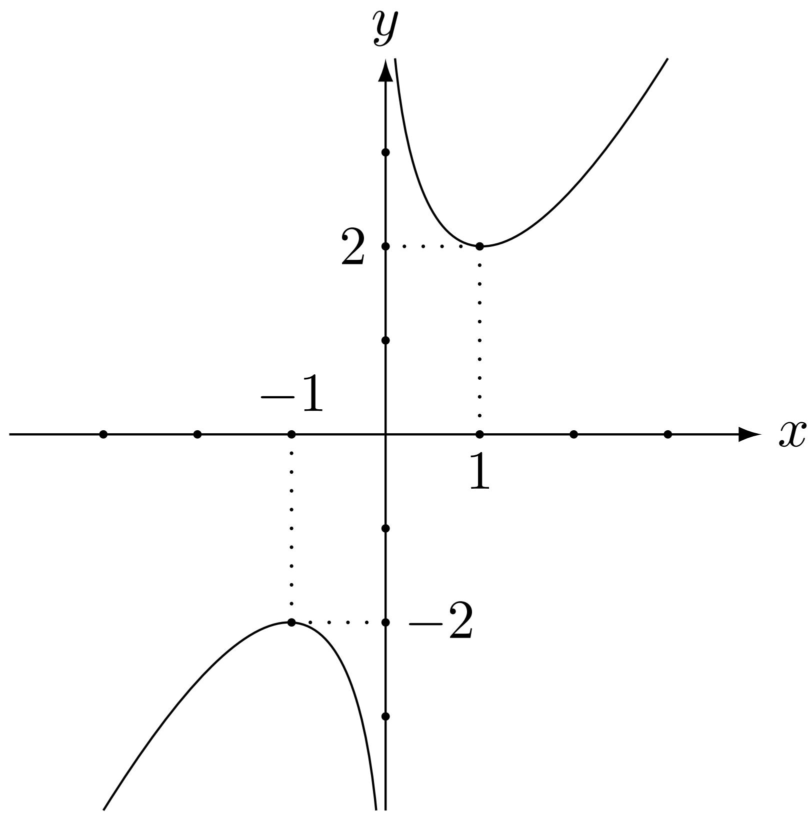
第86回数学教育実践研究会

千歳科学技術大学　　安田 富久一

【 事 の 発 端 】

$y = x + \dfrac{1}{x}$ のグラフの解答を配布

- y 軸を漸近線に持ち、
- $(-1, -2), (1, 2)$ で極値、
- 単純な山型、谷型



【 解決に向けて 】

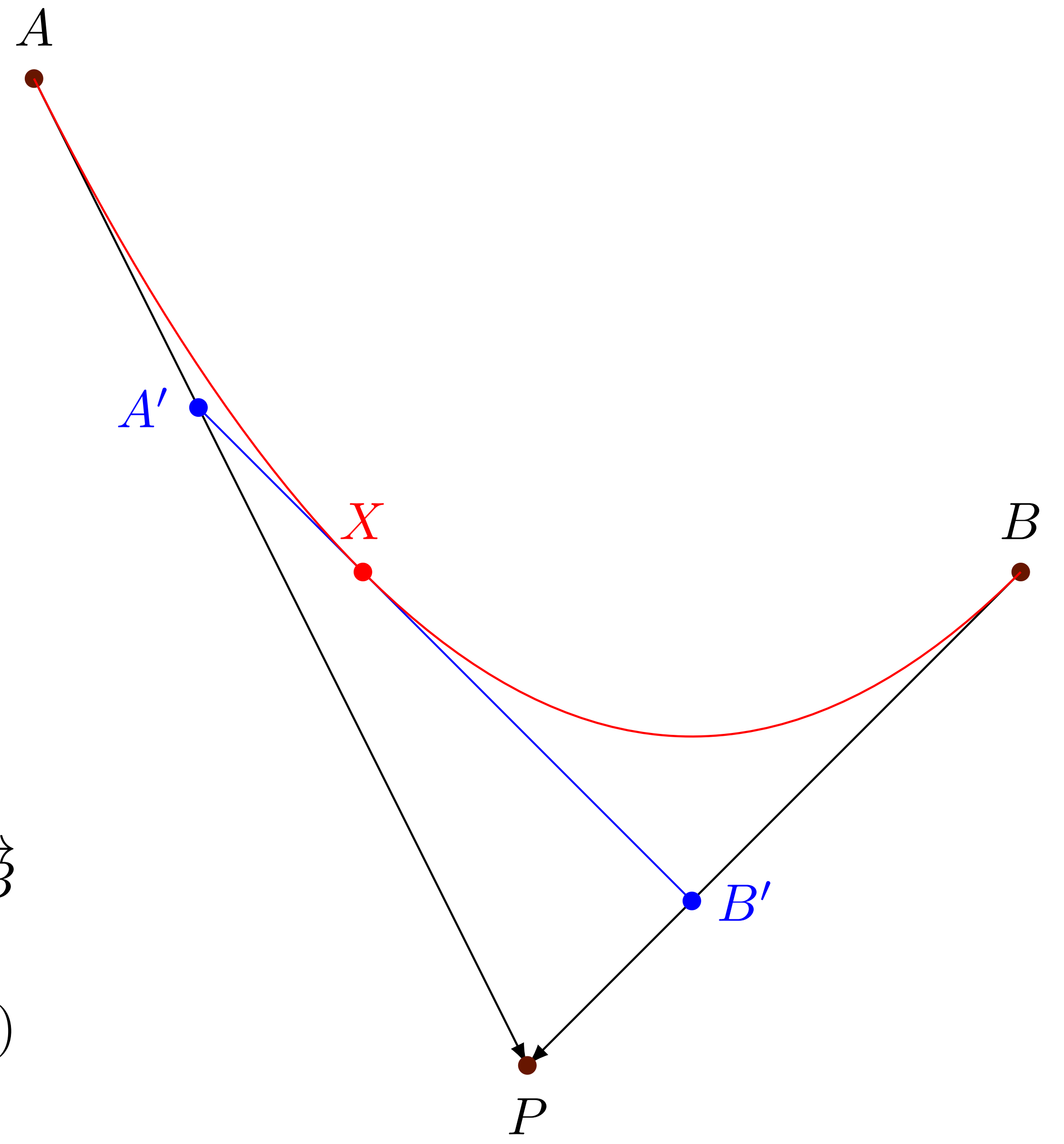
- TEX で数式混在文を書く
- 数式を入力してグラフを各方法を知らない
- TEX の描画はベジェ曲線
- 長尾先生が前研究会でベジェを話された
- 使ってみよう

$$\overrightarrow{OA'} = (1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OP}$$

$$\overrightarrow{OB'} = (1-t)\,\overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX} &= (1-t)\,\overrightarrow{OA'} + t\,\overrightarrow{OB'} \\
&= (1-t)\,\{(1-t)\,\overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{OP}\} \\
&\qquad + t\{(1-t)\,\overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{OB}\} \\
&= (1-t)^2\overrightarrow{OA} + 2(1-t)t\overrightarrow{OP} + t^2\overrightarrow{OB}
\end{aligned}$$

$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

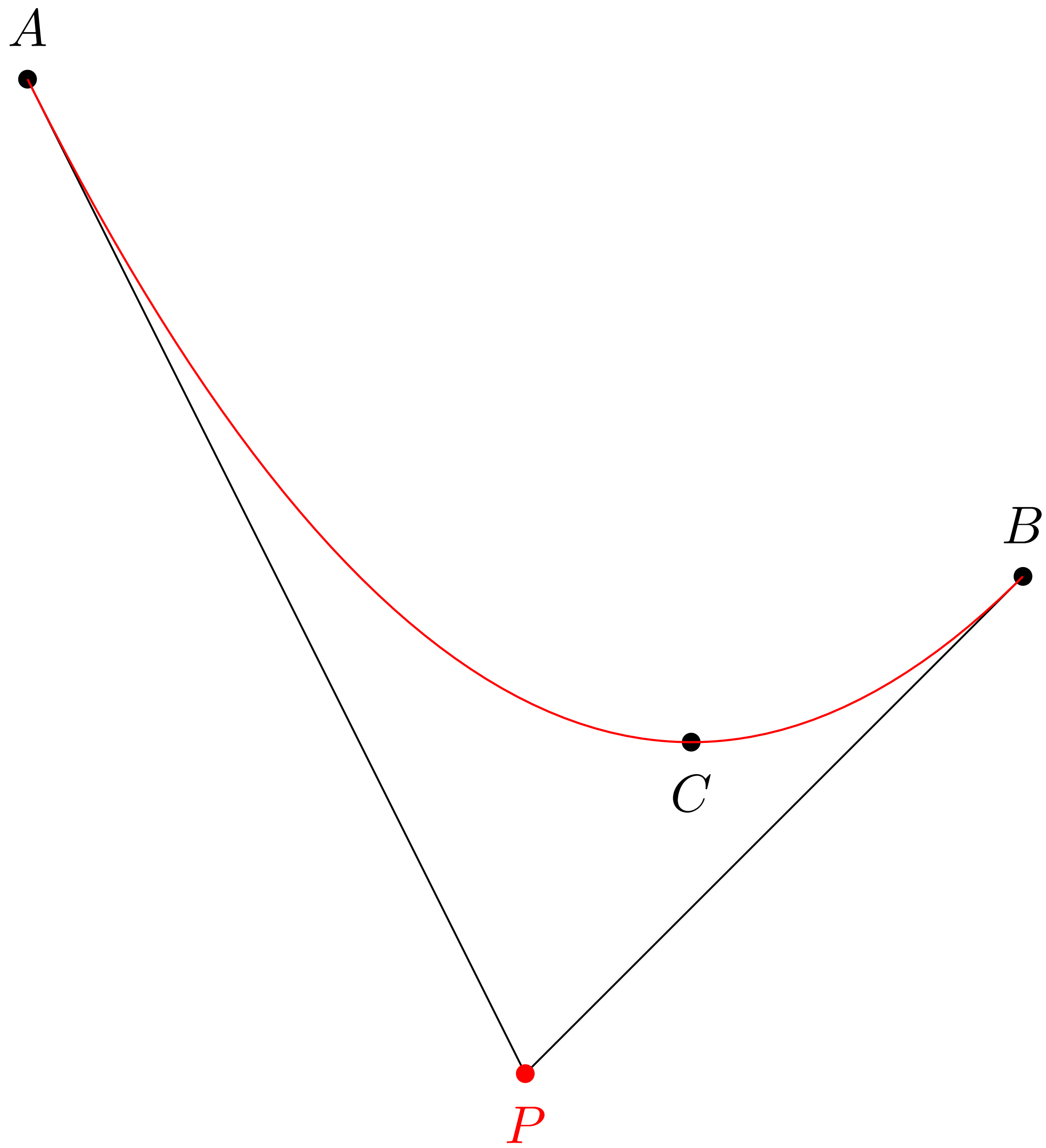


$A(a_1, a_2), B((b_1, b_2), C(c_1, c_2), P(p_1, p_2)$
2次のベジェ曲線の成分表示は

$$x = a_1(1-t)^2 + 2p_1t(1-t) + b_1t^2$$
$$y = a_2(1-t)^2 + 2p_2t(1-t) + b_2t^2$$
$$(0 \leqq t \leqq 1)$$

点 A, B, C, P の位置関係

$$a_1 < c_1 < b_1$$
$$a_1 < p_1 < b_1$$
$$c_2 < b_2 \leqq a_2$$
$$p_2 < b_2 \leqq a_2$$



$$\begin{cases} x = a_1(1-t)^2 + 2p_1 t(1-t) + b_1 t^2 \\ y = a_2(1-t)^2 + 2p_2 t(1-t) + b_2 t^2 \end{cases}$$

【補題】 $u(t) = \alpha(1-t)^2 + 2\beta t(1-t) + \gamma t^2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$

x	:	$\alpha < \beta < \gamma$	狭義単調増加関数
y	:	$\beta < \min\{\alpha, \gamma\}$	谷型

【証明】

- $u'(t) = -2\alpha(1-t) + 2\beta(1-2t) + 2\gamma t$
- $u'(0) = 2(\beta - \alpha)$
- $u'(1) = 2(\gamma - \beta)$
- xは単調増加する。
- yは極小値をただ一つ持ち、谷型。
- このyの極小を与えるtのときの(x, y)が点C

$$\frac{dy}{dt} = 2(a_2 + b_2 - 2p_2)t + 2(p_2 - a_2)$$

$$t_0 = \frac{a_2 - p_2}{a_2 + b_2 - 2p_2}$$

$$\ell_a = a_2 - p_2\ ,\ \ell_b = b_2 - p_2$$

$$t_0 = \frac{\ell_a}{\ell_a + \ell_b}$$

点 $C(c_1, c_2)$ $$\begin{cases} c_1 = a_1(1-t_0)^2 + 2p_1 t_0(1-t_0) + b_1 t_0^2 \\ c_2 = a_2(1-t_0)^2 + 2p_2 t_0(1-t_0) + b_2 t_0^2 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2(a_2 + b_2 - 2p_2)t + 2(p_2 - a_2)$$

$$t_0 = \frac{a_2 - p_2}{a_2 + b_2 - 2p_2}$$

$$\ell_a = a_2 - p_2 \ , \ \ell_b = b_2 - p_2$$

$$t_0 = \frac{\ell_a}{\ell_a + \ell_b} \ , \ 1 - t_0 = \frac{\ell_b}{\ell_a + \ell_b}$$

極小を与える t_0 は P から A, B への高さの比に区間 $[0, 1]$ を内分する

点 $C(c_1, c_2)$ $\begin{cases} c_1 = a_1(1-t_0)^2 + 2p_1 t_0(1-t_0) + b_1 t_0^2 \\ c_2 = a_2(1-t_0)^2 + 2p_2 t_0(1-t_0) + b_2 t_0^2 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dt} = 2(a_2 + b_2 - 2p_2)t + 2(p_2 - a_2)$$

$$t_0 = \frac{a_2 - p_2}{a_2 + b_2 - 2p_2}$$

$$\ell_a = a_2 - p_2\ ,\ \ell_b = b_2 - p_2$$

$$t_0 = \frac{\ell_a}{\ell_a + \ell_b}\ ,\ 1 - t_0 = \frac{\ell_b}{\ell_a + \ell_b}$$

極小を与える t_0 は P から A, B への高さの比に区間 $[0, 1]$ を内分する

点 $C(c_1, c_2)$ $\quad \begin{cases} c_1 = a_1(1 - t_0)^2 + 2p_1 t_0(1 - t_0) + b_1 t_0^2 \\ c_2 = a_2(1 - t_0)^2 + 2p_2 t_0(1 - t_0) + b_2 t_0^2 \end{cases}$

$$c_2 = \frac{a_2 \ell_{b,2}^2 + 2p_2 \ell_{a,2} \ell_{b,2} + b_2 \ell_{a,2}^2}{(\ell_{a,2} + \ell_{b,2})^2}$$

$$
\begin{aligned}
2p_2^3 - (a_2 + b_2 + 4c_2)p_2^2 - 2(a_2b_2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2)p_2 \\
+a_2^2b_2 + a_2b_2^2 - a_2^2c_2 - b_2^2c_2 - 2a_2b_2c_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2p_2^3 - (a_2 + b_2 + 4c_2)p_2^2 - 2(a_2b_2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2)p_2 \\
+a_2^2b_2 + a_2b_2^2 - a_2^2c_2 - b_2^2c_2 - 2a_2b_2c_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$
(2p_2 - a_2 - b_2)(p_2^2 - 2c_2p_2 - a_2b_2 + b_2c_2 + c_2a_2) = 0
$$

$$
\therefore \quad p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}\ ,\ c_2 \pm \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)}
$$

$$\begin{aligned}2p_2^3 - (a_2 + b_2 + 4c_2)p_2^2 - 2(a_2b_2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2)p_2 \\ +a_2^2b_2 + a_2b_2^2 - a_2^2c_2 - b_2^2c_2 - 2a_2b_2c_2 = 0\end{aligned}$$

$$(2p_2 - a_2 - b_2)(p_2^2 - 2c_2p_2 - a_2b_2 + b_2c_2 + c_2a_2) = 0$$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}\ ,\ c_2 \pm \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)}$$

$$\frac{a_2 + b_2}{2} > b_2$$

$$c_2 + \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)} > c_2 + \sqrt{(b_2 - c_2)^2} = b_2$$

$$\therefore \quad p_2 = c_2 - \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)}$$

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a_1\ell_b^2 + 2p_1\ell_a\ell_b + b_1\ell_a^2}{(\ell_a+\ell_b)^2} \\
\therefore \quad p_1 &= \frac{c_1(\ell_a+\ell_b)^2 - a_1\ell_b^2 - b_1\ell_a^2}{2\ell_a\ell_b} \\
&= c_1 - \frac{1}{2}\left\{(a_1-c_1)\frac{\ell_b}{\ell_a} + (b_1-c_1)\frac{\ell_a}{\ell_b}\right\}
\end{aligned}
$$

ℓにはp_2が残っている。a, b, cだけで書き換えたい。

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{a_1\ell_b^2 + 2p_1\ell_a\ell_b + b_1\ell_a^2}{(\ell_a+\ell_b)^2} \\
\therefore \quad p_1 &= \frac{c_1(\ell_a+\ell_b)^2 - a_1\ell_b^2 - b_1\ell_a^2}{2\ell_a\ell_b} \\
&= c_1 - \frac{1}{2}\left\{(a_1-c_1)\frac{\ell_b}{\ell_a} + (b_1-c_1)\frac{\ell_a}{\ell_b}\right\}
\end{aligned}
$$

ℓにはp_2が残っている。a, b, cだけで書き換えたい。

$$
\frac{\ell_a}{\ell_b} = \frac{a_2-c_2+\sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}}{b_2-c_2+\sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}} = \frac{\sqrt{a_2-c_2}}{\sqrt{b_2-c_2}}
$$

$$
\frac{\ell_b}{\ell_a} = \frac{b_2-c_2+\sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}}{a_2-c_2+\sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}} = \frac{\sqrt{b_2-c_2}}{\sqrt{a_2-c_2}}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{a,1} &= a_1 - c_1 \\
L_{b,1} &= b_1 - c_1 \\
L_{a,2} &= a_2 - c_2 \\
L_{b,2} &= b_2 - c_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{点}\, P \ &= \left(c_1 - \frac{1}{2}\left(L_{a,1}\sqrt{\frac{L_{b,2}}{L_{a,2}}} + L_{b,1}\sqrt{\frac{L_{a,2}}{L_{b,2}}} \right) \ , \ c_2 - \sqrt{L_{a,2}L_{b,2}} \right) \\
&= (c_1, c_2) - \left(\frac{1}{2}\left(L_{a,1}\sqrt{\frac{L_{b,2}}{L_{a,2}}} + L_{b,1}\sqrt{\frac{L_{a,2}}{L_{b,2}}} \right) \ , \ \sqrt{L_{a,2}L_{b,2}} \right)
\end{aligned}
$$

点 P は、

点 C を原点とみた 2 点 A, B の位置ベクトルにより決まる

【 反　省 】

- p_2 に関する3次方程式を解くのはきつい
- ふと数式処理ソフトで解かせてみようと思った
- 綺麗に因数分解できてラッキーにも解が求まった
- 3次方程式になるのは必然か？

$$y = (a_2 + b_2 - 2p_2)t^2 - 2(a_2 - b_2)t + a_2$$

$$= (\ell_a + \ell_b)\left(t - \frac{\ell_a}{\ell_a + \ell_b}\right)^2 + \frac{a_2 b_2 - p_2^2}{\ell_a + \ell_b}$$

$$\therefore \quad c_2 = \frac{a_2 b_2 - p_2^2}{\ell_a + \ell_b} \quad \left(t_0 = \frac{\ell_a}{\ell_a + \ell_b}\right)$$

$$\therefore \quad p_2^2 - c_2 p_2 - a_2 b_2 + b_2 c_2 + c_2 a_2 = 0$$