北数教“第 86 回数学教育実践研究会”

ベジェ曲線で楽しんだ数学

レポート

平成 25 年 8 月 3 日 (土)

北海道小樽桜陽高等学校

千歳科学技術大学　安田富久一

ベジェ曲線で楽しんだ数学

1　はじめに

小テストで $y = x + \dfrac{1}{x}$ のグラフを描く問題を出した。微分をして増減表を作成して、グラフは右図のように y 軸を漸近線に持ち、$(-1, -2), (1, 2)$ でそれぞれ極大、極小となり、単純な山型、谷型になるグラフだ。

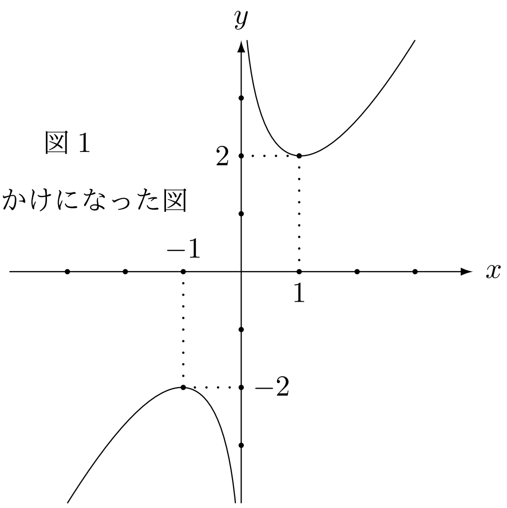

図 1
きっかけになった図

問題は、この解答を作成しようとしてグラフを実際に描かなければならなくなった。数学の文章を作成するのに TEX を使っている。文章に図を入れるのに、TEX のソフト自身の中にある作図機能が利用できる。それを使ってみようとしたのが今回のレポートのきっかけである。

TEX の解説書に、作図機能で使える曲線はベジェ曲線だという説明があった。このとき、今年度 6 月 8 日にあった本研究会で北海道室蘭東翔高等学校の長尾良平先生がベジェ曲線というものをレポート発表されていたのを思い出した（長尾先生の発表 [1]）。そして、どのように曲線を描くのかを大雑把に理解して適当にやっていき、試行錯誤の後ちょうど極大、極小が $(-1, -2), (1, 2)$ になる右上の図ができ、まずは学生に渡す解答例を作ることができた。

もっとも、こだわらなければ、先に適当に図を書いておき（ベジェ曲線はどう描いても山型・谷型になってくれる）、x 軸 y 軸の目盛り幅を極値点が $(-1, -2), (1, 2)$ であるように取れば済むのだが、先にきっちり極値点を取っておいて、ベジェ曲線の頂上、谷底がきっちり極値点を通るようにしたくて試行錯誤を試みた。

学生に渡す解答例を作った後、試行錯誤せずに数学的にスパッと求める公式を作ってみいのが数学の人情（人呼んでそれを“数学化”と言う ？ ）。通勤電車の中で考えるのに楽しい問題になった、というのが今回のレポートである。

2　問題設定

2 次ベジェ曲線は、制御点と呼ばれる 3 点 A, B, P により決定される曲線である。それは、“2 点 A, B を固定した上で、線分 AB を点 P の方に引っ張った滑らかな曲線”というイメージを私は感じている（コンピュータのお絵かきソフトを使ったときに感じた自分の感覚）。これは数学的にはきっちりと定式化されている。3 点 A, B, P からベジェ曲線は媒介変数表示によるベクトル方程式として次のように表される曲線である（長尾先生の発表 [1]）。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= (1-t)\left\{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OP}\right\} + t\left\{(1-t)\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OB}\right\} \quad (0 \leqq t \leqq 1) \quad \cdots\cdots\cdot (2.1) \\ &= (1-t)^2\overrightarrow{OA} + 2(1-t)t\overrightarrow{OP} + t^2\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

つまり、点 X は線分 AP を $t : (1-t)$ に内分する点 A'、線分 PB を $t : (1-t)$ に内分する点 B' を求め、さらに線分 $A'B'$ を $t : (1-t)$ に内分した点になっている。これを成分で見てみよう。$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), P(p_1, p_2)$ とすると、2 次のベジェ曲線はパラメータを t $(0 \leqq t \leqq 1)$ として、

$$x = a_1(1-t)^2 + 2p_1t(1-t) + b_1t^2 \tag{2.2}$$
$$y = a_2(1-t)^2 + 2p_2t(1-t) + b_2t^2 \tag{2.3}$$

と表される。

今回のレポートでは、3 点 $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ を通り、点 C が極小点となるように点 P を決める問題を考えた。特に“はじめに”で述べたように、右図 2 のような状況が解決したい問題なので、左から右に見ていって、A, P, B の順になっており、下から上に見ていって P, A, B の順（点 C も同様の順）になるように、次のように状況設定する。

$$a_1 < c_1 < b_1 \tag{2.4}$$
$$a_1 < p_1 < b_1 \tag{2.5}$$
$$c_2 < b_2 \leqq a_2 \tag{2.6}$$
$$p_2 < b_2 \leqq a_2 \tag{2.7}$$

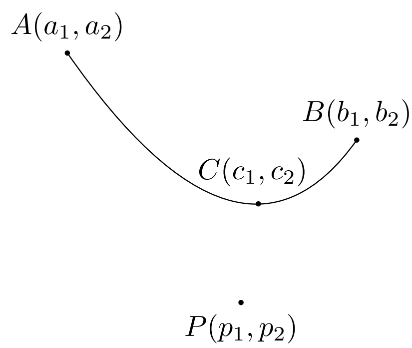

図 2 ベジェ設定

3 問題解決

極小点が C になることを式で表現できれば、p_1, p_2 に関する方程式が得られ、その方程式を解いて p_1, p_2 が求まるであろうという希望的観測が持てる。そこで、極小点が C になることを式で表現してみよう。

図 2 の状況なら、(2.2),(2.3) で決まる点 (x, y) は、t が 0 から 1 まで変化するとき、点 A から点 B まで左から右へと移動していくことが予想される（ 長尾に予想の元になる図がある)。その予想に関わり (2.2)〜(2.7) を念頭において次の補題を用意しよう。

【補題】 $u(t) = \alpha(1-t)^2 + 2\beta t(1-t) + \gamma t^2$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ について、次の (1),(2) が成り立つ。

(i) $\alpha < \beta < \gamma$ ならば $u(t)$ は狭義単調増加関数である。

(ii) $\beta < \min\{\alpha, \gamma\}$ ならば次のことを満たす t_0 が $0 < t < 1$ に存在する:
- $0 < t < t_0$ で $u(t)$ は狭義単調減少関数である。
- $t_0 < t < 1$ で $u(t)$ は狭義単調増加関数である。

【証明】（微分を使うが、数 I の範囲の 2 次関数の処理でも証明可能：最後に付けた）

(i) $u'(t) = -2\alpha(1-t) + 2\beta(1-2t) + 2\gamma t$ であり、$u'(0) = 2(\beta-\alpha) > 0$, $u'(1) = 2(\gamma-\beta) > 0$ となる。$u'(t)$ は 1 次式なので、$0 \leqq t \leqq 1$ において $u'(t)$ は常に正の値を取ることがわかり、$u(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ で狭義単調増加する。

(ii) $u'(0) = 2(\beta-\alpha) < 0$, $u'(1) = 2(\gamma-\beta) > 0$ となる。$u'(t)$ は 1 次式なので、t が 0 から 1 まで変化するとき、$u'(t)$ は $-$ から $+$ へと変わる。よって、(ii) が成り立つ（証明終わり）

今得た補題から次のことがわかる。

- 補題 (i) を (2.2) に適用すると, x は $0 \leqq t \leqq 1$ で単調増加する。
- 補題 (ii) を (2.3) に適用すると, y は $0 \leqq t \leqq 1$ で極小値をただ一つ持つ谷型の関数であることがわかる。

この両者を考え合わせると、$t = t_0$ に対応する点 (x, y) が C になる。(2.3) から

$$\frac{dy}{dt} = 2(a_2 + b_2 - 2p_2)t + 2(p_2 - a_2)$$

なので、これを 0 にする t を t_0 として

$$t_0 = \frac{a_2 - p_2}{a_2 + b_2 - 2p_2}$$

を (2.2),(2.3) に代入して得られる点が C である。ここで、ベジェ曲線の本質的な部分は、点 P と A, B の位置関係で決まっているだろうということから、

$$\begin{cases} \ell_a = a_2 - p_2 & \cdots\cdots (3.1) \\ \ell_b = b_2 - p_2 & \cdots\cdots (3.2) \end{cases}$$

とおけば、C の点を与える t_0 は

$$t_0 = \frac{\ell_a}{\ell_a + \ell_b} \quad \cdots\cdots (3.3)$$

と表されることになる。このとき、$1 - t_0 = \dfrac{\ell_b}{\ell_a + \ell_b}$ となるから、(3.3) と考え合わせて、

極小を与える t_0 は P から A, B への高さの比に区間 $[0, 1]$ を内分する

ということがわかる。そして、点 C の座標は

$$\begin{cases} c_1 = a_1(1-t_0)^2 + 2p_1 t_0(1-t_0) + b_1 t_0^2 & \cdots\cdots (3.4) \\ c_2 = a_2(1-t_0)^2 + 2p_2 t(1-t_0) + b_2 t_0^2 & \cdots\cdots (3.5) \end{cases}$$

と表されることになる。ここで (3.3) を (3.5) に代入すると

$$c_2 = \frac{a_2\ell_b^2 + 2p_2\ell_a\ell_b + b_2\ell_a^2}{(\ell_a + \ell_b)^2}$$

分母を払い、p_2 の方程式として整理すると

$$2p_2^3 - (a_2 + b_2 + 4c_2)p_2^2 - 2(a_2b_2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2)p_2 + a_2^2b_2 + a_2b_2^2 - a_2^2c_2 - b_2^2c_2 - 2a_2b_2c_2 = 0$$

これは 3 次方程式で大変そうに見えるが、左辺は因数分解できて、

$$(2p_2 - a_2 - b_2)(p_2^2 - 2c_2p_2 - a_2b_2 + b_2c_2 + c_2a_2) = 0 \quad \cdots\cdots (3.6)$$

$$\therefore \quad p_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} \ , \ c_2 \pm \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)}$$

となる。ところで、(2.6) より、

$$\frac{a_2 + b_2}{2} > b_2$$

$$c_2 + \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)} > c_2 + \sqrt{(b_2 - c_2)^2} = b_2$$

であり、(2.7) を考えると

$$p_2 = c_2 - \sqrt{(a_2 - c_2)(b_2 - c_2)} \quad \cdots\cdots (3.7)$$

であることがわかる。

最後に p_1 を求めよう。(3.4) に (3.3) を代入すると

$$c_1 = \frac{a_1\ell_b^2 + 2p_1\ell_a\ell_b + b_1\ell_a^2}{(\ell_a + \ell_b)^2}$$

$$\therefore \quad p_1 = \frac{c_1(\ell_a + \ell_b)^2 - a_1\ell_b^2 - b_1\ell_a^2}{2\ell_a\ell_b}$$

$$= c_1 - \frac{1}{2}\left\{(a_1 - c_1)\frac{\ell_b}{\ell_a} + (b_1 - c_1)\frac{\ell_a}{\ell_b}\right\} \quad \cdots\cdots (3.8)$$

これで点 P をどう取れば良いか求まったが、(3.8) をさらに変形して書き換えてみよう。(3.1),(3.2),(3.7) より

$$\frac{\ell_a}{\ell_b} = \frac{a_2 - c_2 + \sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}}{b_2 - c_2 + \sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}} = \frac{\sqrt{a_2-c_2}}{\sqrt{b_2-c_2}} \quad \cdots\cdots (3.9)$$

$$\frac{\ell_b}{\ell_a} = \frac{b_2 - c_2 + \sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}}{a_2 - c_2 + \sqrt{(a_2-c_2)(b_2-c_2)}} = \frac{\sqrt{b_2-c_2}}{\sqrt{a_2-c_2}} \quad \cdots\cdots (3.10)$$

ここで、点 C から 2 点 A, B への距離に関する値として、次のような記号を用意する。

$$L_{a,1} = a_1 - c_1 \quad , \quad L_{b,1} = b_1 - c_1 \quad \cdots\cdots (3.11)$$

$$L_{a,2} = a_2 - c_2 \quad , \quad L_{b,2} = b_2 - c_2 \quad \cdots\cdots (3.12)$$

求める点 P の座標は (3.7)～(3.12) より

$$\left(c_1 - \frac{1}{2}\left(L_{a,1}\sqrt{\frac{L_{b,2}}{L_{a,2}}} + L_{b,1}\sqrt{\frac{L_{a,2}}{L_{b,2}}} \right) \ , \ c_2 - \sqrt{L_{a,2}L_{b,2}} \right) \quad \cdots\cdots (3.13)$$

これで問題が解決した。

得られた (3.13) からは、点 P は、点 C を原点とみた 2 点 A, B の位置ベクトルにより決まることがわかる。

4 反省

3 ページで p_2 に関する 3 次方程式を解かなければならなくなったとき、少し挫折気味であった。諦めかけたが、ふと数式処理ソフトで解かせてみよう、“美味く見つかれば儲けもの”程度の軽い気持ち（好きな言葉に、高橋是清という人の家訓十ヵ条の中の 1 つの条に「人生一寸先は明るい」がある。数学をやるのにいい言葉だと思う）で Maxima というフリーソフトを使った。結果はこれまで述べてきたとおりで、綺麗に因数分解できて解が求まった。

ところで、3 次方程式になるのは必然だろうか？実は、別解を考えていて必然ではないことがわかった。その別解を紹介する。

【別解】

2 ページの補題の証明でも書いておいたが、微分を使わないで、放物線の軸との関係を考察していればこれから示す方法は自然に浮かんだ方法であることがわかるだろう。今回の問題を解く場合のキーポイントは補題 (ii) の結果を使うところであった。

【補題の別証明】

$$\begin{aligned} u(t) &= (\alpha+\gamma-2\beta)t^2 - 2(\alpha-\beta)t + \alpha \\ &= (\alpha+\gamma-2\beta)\left(t - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma-2\beta}\right)^2 + \frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\alpha+\gamma-2\beta} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (4.1)$$

である。

(i) $\alpha < \beta < \gamma$ のとき $u(t)$ が狭義単調増加関数になるか調べてみよう。

この放物線の軸は $t = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma-2\beta}$ である。分子は $\alpha-\beta<0$ なので、分母について $\alpha+\gamma-2\beta>0$ なら軸が負となり、しかも $\alpha+\gamma-2\beta$ は 2 次の係数なので、下に凸であるから、$0 \leqq t \leqq 1$ で狭義単調増加である。

次に、$\alpha-\beta < \alpha+\gamma-2\beta$ であることに注意すると、$\alpha+\gamma-2\beta<0$ ならば、軸につい

て $t=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma-2\beta}>1$ となる。しかも上に凸になっているから、やはり $0\leqq t\leqq 1$ で狭義単調増加であることがわかり、証明された。

(ii) $\beta<\min\{\alpha,\gamma\}$ ならば $u(t)$ は最初単調減少し、後に単調増加することを調べてみよう。

この場合、$0<\alpha-\beta<\alpha+\gamma-2\beta$ なので、軸について $0<\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma-2\beta}<1$ であることがわかり、2 次の係数について $\alpha+\gamma-2\beta>0$ であるから下に凸である。よって、最初単調減少し、後に単調増加することがわかる。（証明おわり）

上記補題の証明 (ii) において、極小値を与える t を t_0 とすると $t_0=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\gamma-2\beta}$ である。

次に、いよいよキーポイントである極小点が C となるように p_2 の方程式を作るのだが、補題を今のように証明していれば、(3.3) を使って (3.5) を変形するには、3 ページからの変形とは違い当然次のようになるのではないか。

$$c_2=\frac{a_2b_2-p_2^2}{a_2+b_2-2p_2} \quad (\because\ (4.1)\ )$$

$$p_2^2-c_2p_2-a_2b_2+b_2c_2+c_2a_2=0 \quad \cdots\cdots \quad (4.2)$$

となり、3 次方程式ではなく 2 次方程式が得られた。この (4.2) は 3 ページの (3.6) で得られた 3 次方程式の 2 次の因数である。この後は 3 ページの該当箇所以降と全く同じである。つまり、一切 3 次方程式とは無縁である。

5　終わりに：楽あれば苦あり・苦有れば楽あり

始めに示した補題の証明は微分を使い非常にスマートに処理できたが、その後に面倒が待っていた。幸い数式処理ソフトのおかげで諦めずにやり通し、綺麗な結果が得られたので助かった。危うくこの問題は綺麗には解けない、と挫折していた可能性がある。

一方、2 次関数の平方完成による処理は、ごたごた面倒だったが、その後は自然に変形処理が進み、おまけに見かけ倒しの 3 次方程式に遭遇することなく処理できた。

楽あれば苦あり、苦有れば楽あり

を痛切に感じた。

今回は室蘭東翔高校の長尾先生の発表 [1] を参考にさせていただいた。その発表の中で、今年の１月、本研究会で私が講演で取り上げたベルンシュタイン多項式が今回のベジェ曲線にも現れることを教えていただいた。このことがベジェ曲線をグラフを描くときの問題解決の道具として使ってみようという気持ちにさせてくれた誘因事項かも知れない。長尾先生の発表が私にベジェ曲線への親近感を抱かせてくれたのだろうと思う。長尾先生にこの場を借りて感謝の意を表します。

[1] に私の発表 [2] の話のことが書かれています。当日、私は資料なしのプレゼンのみの講演をしました。資料となるとかなり長いものになるため、なかなか完成させずにいましたが、今回を期に作成しました。数実研ＨＰ担当の先生にアップをお願いしておきます。近々数学の泉にアップされると思います。

参考文献

[1] 長尾良平「繋げてみませんか」:
第 85 回数学教育実践研究会での発表資料
http://izumi-math.jp/
のトップページの真ん中の左にある　“数学教育実践研究会”　をクリックし
“数実研レポート発表一覧　第８１回～”　をクリックする
“数実研レポート発表一覧　第８５回”で長尾先生の発表資料の青字を見つける
それをクリックすると資料が出てくる。

[2] 安田富久一「本日の料理は“多項式による近似”です」:
第 84 回数学教育実践研究会での発表資料（近日掲載予定）