北数教“第７９回数学教育実践研究会”

中間報告

課題研究を担当して

レポート

日　時　　平成２３年１１月２３日(土)

会　場　　アスティ４５ビル
　　　　　１０Ｆセミナールーム

北海道室蘭栄高等学校　　安　田　富久一

1　基礎課題研究

- SSH での 1 年生理数科の後期授業
- 2 年生課題研究のウォーミングアップ
- 10 月 13 日 (木)　オリエンテーション
- 10 月 20 日 (木) 〜 2 月まで　(2 時間連続研究）× 10 回
- 2 月　ポスター発表
- 木曜日の午後 56 時間目に (2 時間連続研究) を実施
- 生徒は 23 講座から研究したいものを選ぶ（第 5 希望まで）

2　安田講座の紹介

小学校の時に、

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{1+2}{4+5}=\frac{1}{3}$$

と計算して叱られた。

では、分数の足し算としてではなく、2 つの分数から新たに分数を作る

$$\frac{1}{4}\,,\ \frac{2}{5}\longrightarrow\frac{1+2}{4+5}=\frac{1}{3} \tag{1}$$

という見方をしたら $\cdots\cdots$ 。

分母が 5 以下で、1 より小さい分数を順に書き並べてみると

$$\frac{0}{1}\,,\ \frac{1}{5}\,,\ \frac{1}{4}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \frac{2}{5}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{3}{5}\,,\ \frac{2}{3}\,,\ \frac{3}{4}\,,\ \frac{4}{5}\,,\ \frac{1}{1} \tag{2}$$

(1) の左は、上の数列 (2) の第 3 項と第 5 項であり、新しく作られた分数である (1) の右は、(2) の第 3 項と第 5 項の間の第 4 項になっている。つまり、連続する 3 項の両側の分数に新たな分数の作り方の操作を施すと、ちょうど真ん中の分数が出てくる。調べてみるとすぐにわかるが、(2) のどの連続する 3 項をとってもそうなっている。

では、分母が 5 以外の場合でも同じようなことになるのだろうか。

X_n : 分母が n 以下の 1 以下の既約分数のことを表すとしておく。このとき、次のページのような表になる。その表を見ると、分母が 7 までは少なくとも正しいことがわかる。

X_1	$\frac{0}{1}$																		$\frac{1}{1}$
X_2	$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{2}$									$\frac{1}{1}$
X_3	$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$						$\frac{1}{1}$
X_4	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$				$\frac{1}{1}$
X_5	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$			$\frac{1}{1}$
X_6	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{1}{1}$
X_7	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{1}$

3　実際の研究の状況

これまでの 4 回の状況を、生徒に渡したプリントの内容や進捗状況を以下に示す。

3.1　第 1 回（10 月 20 日）配布プリントの内容

【 1 】次の数の並びはどんな規則で並んでいるか見抜き、□ に適切な数を入れよ。

(1) 3 , 7 , 11 , 15 , $\boxed{}$, 23　　(2) 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{16}$, $\boxed{}$, $\frac{5}{36}$

(3) 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , $\boxed{}$, 21　　(4) 1 , 2 , 6 , 15 , $\boxed{}$, 56

【 2 】実験

1 以下の約分し終わった分数を小さい順に並べる（0 は $\frac{0}{1}$、1 は $\frac{1}{1}$ と書く）。分母がそれぞれ 2 以下、3 以下、4 以下、5 以下、6 以下の分数で書いてみる。

【 3 】何か気づいたこと、感じること、してみたいこと。

【 4 】（不定方程式について）

(1) 13 で割ると 7 余り、17 で割ると 14 余る数を求めよ。　　(2) マニュアルを作る。

3.2　プリントの【3】について

【生徒の興味・関心（研究課題）】

生徒（今後、A 君、B 君、C 君と呼ぶ）は、次のようなことに興味・関心を抱いた。それらを研究課題とすることにした。

- **C** 分数の分母は左右対称になっている
- **A** 分数の分母は分母同士、分子は分子同士たして割ると必ず $\dfrac{1}{2}$ になるような気がする。少なくとも、位数が 4 以下の場合には正しい。
- **A** 分子で一番大きな数は分母より 1 だけ小さい。
- **B** 位数が一つあがると何個分数が増えるか調べてみたい。
- **B** 分子は 1 が多い。
- **皆** 隣同士引き算すると分子は必ず 1 になる（安田「引いてみたか」の指示後）。

【当初目標】を確認しておくと

n がどんな自然数であっても、$\dfrac{b}{a}, \dfrac{y}{x}, \dfrac{d}{c}$ が X_n の連続する 3 つの分数なら、$\dfrac{b+d}{a+c} = \dfrac{y}{x}$ である。

3.3　補足

時間が少し余ったので、補足として次のような話しをした。

オリエンテーションでの見える点のプレゼンで（このプリントだけをご覧の方にはごめんなさいよくわからない文になってしまっています)、原点から見たとき

- どの方向を見ても必ずどれかの点が見えるか？
一つの点も見えないようなことがあるか？
＜回答＞必ず点が見える〔2 人〕、全く見えないような方向があると思う〔1 人〕
- 見えないような方向がある。見える点は傾きを考えると、分数になる傾きだ。
分数にならないような傾きがあるかということだが、そんなことあるか？
＜先ほどの 1 人の答えを言った生徒＞ $\sqrt{3}$ は分数で書けない、と中学校のときの塾の先生が言ってたように思う。
- 見える点がある方向と一つも見えない方向とではどちらが多いと思う。
＜回答＞断然見える方向の方が多いと思う
- 実は、見えない方が多い。信じられないくらい多い。

3.4　第 2 回（10 月 27 日）

将来的に必要になる可能性があるので、数学的帰納法の説明をした（ただし、「数学的帰納法」というネーミングは教えなかった）。

対称式は基本対称式に書き換えられるという事実の次の証明を見せることで帰納法の考えを示した。

- ax^ny^m があれば必ず ax^my^n がある。
- $ax^ny^m + ax^my^n = a(xy)^n(x^{m-n} + y^{m-n})$ なので、
  $x^k + y^k$ についてわかればよい。
- $x^n + y^n = (x^{n-1} + y^{n-1})(x + y) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$ なので、
  連続する 2 つの $x^k + y^k$ タイプが OK なら、その次のタイプも OK。
- 連続する $x + y$, $x^2 + y^2$ が OK なので、これ以降は全て OK。
  正しさが遺伝する。

このあと、生徒は各自の興味・関心による研究課題を考え始めた。C 君が、分母が対称になることについて、対象のペアとして $\dfrac{k}{n}$ と $\dfrac{n-k}{n}$ に目を付け、分子を足すと n になることに注目した。

その話しを聞いた A 君が、分母同士、分子同士全て足すと必ず $\dfrac{1}{2}$ になる、のヒントにならないかと感じた。分数ペアを順番に（既約分数であるかないかを気にせず）すべて黒板に書いたので、それは今考えている問題と違うという批判が残り二人から出された。

現目的達成にはならないが、副産物的に $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ が得られることを話した (安田)。

3.5　第 3 回（11 月 17 日）

【1】＜今後の進め方について＞

- これからは、安田からは余り話さないので、３人で協力し合いながら進めるように。
- このような問題は慣れていないだろうから、分からない所はすぐにでも聞きに来るように。
- 聞きに来すぎて、そろそろ自分でもう少し考えた方が、と思ったときはそのように言うので、遠慮なく聞くように。

【2】３人それぞれ各自の研究に入る。

【3】40 分経過した所で、B 君に現在の状況報告をするように指示。

【3】＜**B 君**＞

- 分母が偶数の場合を考えた。例として分母が 20 であるような分数がいくつあるか考えた。
- $20 = 2^2 \times 5$ と素因数分解する。
- 1〜20 の中に偶数は $20 \div 2 = 10$ 個ある。
- 同様に 5 で割り切れるものは $20 \div 5 = 4$ 個ある。
- 5 で割り切れるもののうち偶数は 2 個なので、20 と互いに素な数の個数は

$$20 - (10 + 2) = 8$$

【4】＜本日の最終状況＞

C 分母が対称になることが解決：次回発表する。

A,B p が素数のとき、p^n と互いに素な数は $p^n - p^{n-1}$ 個あることを突き止めた様子（計算用紙にらしき式が書いてあった）。

B 素数 2 つの積の場合をベン図利用で解決とのこと（未発表）。3 つの積の場合に挑戦。

3.6 第 4 回（11 月 24 日）

C「分母は対称」の証明が残り二人の助けもあったが、完了。

A「分母同士、分子同士全て足すと、$\dfrac{1}{2}$ 」に少し詰めの甘さがあり次回持ち越し」

B $n = p^e$ の場合に、既約分数が何個あるかを、n 以下の数で n と互いに素な数の個数を数えて $p^e - p^{e-1}$ になることを示した。さらに、少しヒントを与え、

$$p^e - p^{e-1} = n\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{3}$$

まで至った。このあと、$n = pq$ の場合を考えてみるように言い、それを C 君が

$$n - p - q + 1$$

とした。これを、(3) のような雰囲気に書き換えられないか、と安田が提案したところで時間となった。