北数教“第72回数学教育実践研究会”

# Cambridgeに挑戦（解答）

日　時　　平成２２年２月６日（土）

会　場　　ニッセイＭＫビル４階会議室

北海道滝川高等学校　　安　田　富久一

第 60 回数実研や 4 年前の遠軽紋別数学研究会で、G.H.HARDY が Cambridge University Press から出した

*A Course of Pure Mathematics*

という本（教科書？）の本文や *Examples* から、面白い及び綺麗だと思うものを選んで紹介したことがあった。

前回第 71 回数実研の懇親会で隣同士になった先生から、「その問題を同僚と考えました」と伺った。それで、自分で解いていないのはいけないと思い、解答をつけてみようと取り組んでみた。

頑張ってみたが、解けていないものがある。解けたら、是非教えてください。

問題末に ( *Math. Trip.* $****$ ) と記したものがありますが、これは *Mathematical Tripos* の略であり、ケンブリッジ大学優等生コース（専門家養成コース）の数学の試験問題として $****$ 年に出題されたことを意味します。

**【問１】**

$\dfrac{m}{n}$ が $\sqrt{2}$ の良い近似値なら、$\dfrac{m+2n}{m+n}$ は $\sqrt{2}$ のもっと良い近似値であり、2 つの近似値の間に $\sqrt{2}$ があることを示せ。

**（解答）**

$\sqrt{2}$ の良い近似値を $\dfrac{m}{n}$ としたときの誤差を $h$ とする。$\dfrac{m}{n}=\sqrt{2}+h$ であり、かつ $h$ は十分小さい数である。

$$\frac{m+2n}{m+n}=\frac{\dfrac{m}{n}+2}{\dfrac{m}{n}+1}=\frac{2+\sqrt{2}+h}{1+\sqrt{2}+h}=\sqrt{2}+\frac{(1-\sqrt{2})h}{1+\sqrt{2}+h} \tag{1}$$

$h$ は十分小さな値なので、$1+\sqrt{2}+h>0$ であり、しかも $1-\sqrt{2}<0$ なので、再右辺の分数の値は $h$ と符号が逆になる。さらに、$|1+\sqrt{2}+h|>\sqrt{2}>0$ であることを考えれば、$\sqrt{2}$ と $\dfrac{m+2n}{m+n}$ の差は

$$\left|\frac{(1-\sqrt{2})h}{1+\sqrt{2}+h}\right|<\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}h<\frac{1}{2}h$$

なので、問 1 が示されたことになる。

**【問２】**

単位円に直径 $PQ$ をとる。直径の端点 $P,Q$ において、それぞれ円に接線を引く。その接線上に、$PP'=-\dfrac{2a}{b}$ , $QQ'=-\dfrac{c}{2b}$ をその符号を含めて満たす点 $P',Q'$ をとる。直線 $P'Q'$ と円の交点を $M,N$ とする。直線 $PM$ と $PN$ が直線 $QQ'$ と交わる点をそれぞれ $X,Y$ とする（図 1 参照)。

このとき、$QX,QY$ は 2 次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ の解になることを示せ。

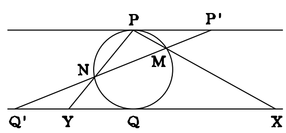


図 1　クラインの図

(脚注に、『この作図による構成はクラインの

*Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie* ”( *Leipzig*, 1895)

に依る』と書かれている。)

**【問３】**

任意の正の有理数は、次の形に一通りに表されることを示せ。

$$a_1+\frac{a_2}{1\cdot 2}+\frac{a_3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{a_k}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$$

$a_1,a_2,\ldots,a_k$ は全て整数で、

$0\leqq a_1$ , $0\leqq a_2<2$ , $0\leqq a_3<3$ , $\cdots$ , $0<a_k<k$

**（解答）**

正の有理数 $x=\dfrac{q}{p}$ を一つ固定する（$p,q$ は互いに素な 2 つの正の整数)。この $p,q$ に対して、0 以上の整数からなる有限数列 $\{b_1,b_2,\cdots,b_p\}$ を次のように帰納的に定義する。

$b_1=[x]$ と決める（但し、$[\alpha]$ は実数 $\alpha$ を超えない最大の整数を表すものとする)。このとき、$0\leqq x-b_1<1$ である。

$b_2=[2!(x-b_1)]$ と決める。このとき、$0\leqq x-b_1<1$ より $0\leqq b_2<2$ は明らか。また、$b_2=[2!(x-b_1)]$ より $b_2\leqq 2!(x-b_1)<b_2+1$ なので

$$0\leqq x-b_1-\frac{b_2}{2!}<\frac{1}{2!}$$

となる。

このあと帰納的に次のように決める。つまり、$b_2,\cdots,b_r$ が

$$0\leqq b_i<i\quad(\,i=2,\cdots,r\,)$$
$$0\leqq x-(b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_i}{i!})<\frac{1}{i!}\quad(\,i=2,\cdots,r\,)$$

と決まっているとき、$b_{r+1}=\left[(r+1)!\left\{x-(b_1+\dfrac{b_2}{2!}+\cdots+\dfrac{b_r}{r!})\right\}\right]$ と決める。

この決め方で、

$$0\leqq b_{r+1}<r+1\,,\;0\leqq x-(b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_{r+1}}{(r+1)!})<\frac{1}{(r+1)!}$$

が成り立っていることは、$r=2$ の場合に成り立つことを示したのと全く同様にわかる。

これを続けていくと、$\{b_1,b_2,\cdots,b_p\}$ が得られるが、$b_p=\left[p!\left\{x-(b_1+\dfrac{b_2}{2!}+\cdots+\dfrac{b_{p-1}}{(p-1)!})\right\}\right]$ であり

$$0\leqq x-(b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_p}{p!})<\frac{1}{p!}$$
$$\therefore\quad 0\leqq p!\left\{x-(b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_p}{p!})\right\}<1\qquad(2)$$

を得る。ここで、$x=\dfrac{q}{p}$ であったので、$p!\left\{x-(b_1+\dfrac{b_2}{2!}+\cdots+\dfrac{b_p}{p!})\right\}$ は整数である。このことと (2) より、

$$p!\left\{x-(b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_p}{p!})\right\}=0$$
$$\therefore\quad x=b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_p}{p!}$$

ここで、

$$b_r \neq 0\ ,\ b_{r+1}=b_{r+2}=\cdots=b_p=0\ (\ 1 \leqq r \leqq p\ )$$

となる $r$ があればそれを $n$ とする。また、そのような $r$ が無いときは $p$ を $n$ とする。そして、項数 $n$ 個の数列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ を $a_r=b_r\ (\ r=1,2,\cdots,n\ )$ と定義すれば、一意性の検証を除いて、問 3 が成り立つことが示されたことになる。

一意性の証明に使う事実をまず確認しておく。

**【命題】**

自然数 $m,n\ (m<n)$ について、次の不等式が成り立つ。

$$\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n-1}{n!}<\frac{1}{m!} \tag{3}$$

**【証明】**

$$\begin{aligned}\frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n-1}{n!}+\frac{1}{n!} &= \frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n}{n!}\\ &= \frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-1)!}\\ &= \frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-1}{(n-1)!}\\ &= \frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{1}{(n-2)!}\\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &= \frac{m}{(m+1)!}+\frac{1}{(m+1)!}\\ &= \frac{m+1}{(m+1)!}\\ &= \frac{1}{m!}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \frac{m}{(m+1)!}+\cdots+\frac{n-2}{(n-1)!}+\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{m!}-\frac{1}{n!}<\frac{1}{m!}$$

一意性を示そう。0 以上の整数 $a_1,a_2,\cdots,a_m;b_1,b_2,\cdots,b_n$ が

$$\begin{aligned}&a_1+\frac{a_2}{2!}+\cdots+\frac{a_m}{m!}=b_1+\frac{b_2}{2!}+\cdots+\frac{b_n}{n!}\\ &0\leqq a_1\ ,\ 0\leqq a_2<2\ ,\ \cdots\ ,\ 0<a_m<m\\ &0\leqq b_1\ ,\ 0\leqq b_2<2\ ,\ \cdots\ ,\ 0<b_n<n\end{aligned}$$

を満たしているとする。$m \geqq n$ としても一般性は失わないので、このように決めておく。$a_1=b_1,\cdots,a_r=b_r\ (0\leqq r<n)$ とすると、

$$\begin{aligned}\frac{|a_{r+1}-b_{r+1}|}{(r+1)!} &= \left|\frac{a_{r+2}-b_{r+2}}{(r+2)!}+\cdots+\frac{a_n-b_n}{n!}+\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{a_m}{m!}\right|\\ &\leqq \frac{r+1}{(r+2)!}+\cdots+\frac{n-1}{n!}+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots+\frac{m-1}{m!}\\ &< \frac{1}{(r+1)!}\end{aligned}$$

より、$|a_{r+1}-b_{r+1}|<1$ となるが、整数であることを考えると $a_{r+1}=b_{r+1}$ である。

よって、$a_k=b_k\ (k=1,2,\cdots,n)$ であることがわかる。

最後に、$m>n$ なら

$$0=\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}+\cdots+\frac{a_m}{m!}\geqq\frac{a_m}{m!}>0$$

となって矛盾するので、$m=n$ である。

以上で一意性も示された。

**【問４】**

$A$ は無理数とする。このとき、$\dfrac{aA+b}{cA+d}$ が有理数となるなるために、有理数 $a,b,c,d$ が満たすべき条件を求めよ。

**（解答）**

$\dfrac{aA+b}{cA+d}$ が有理数であるとし、$\dfrac{aA+b}{cA+d}=p$（但し、$p$ は有理数）とおく。分母を払い変形すると、

$$(pc-a)A+pd-b=0$$

を得る。$pc-a$ 及び $b-pd$ は共に有理数なので、

$$pc=a\ ,\ pd=b$$

となる。この 2 式から $p$ を消去すると、必要条件

$$\begin{aligned} &ad-bc=0 \\ \therefore\quad &a:c=b:d \end{aligned} \tag{4}$$

を得る。

逆に $a:c=b:d$ のとき、この比の値を $p$ とおくと、$p$ は有理数であり、$a=pc$ , $b=pd$ なので、

$$\frac{aA+b}{cA+d}=\frac{p(cA+d)}{(cA+d)}=p$$

となり、$p$ は有理数なので、(4) は十分条件でもあり、(4) が求める条件であることがわかる。

**【問５】**

$a,b,c$ が $a+b+c=1$ をみたす正の数であるとき、

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geqq 8$$

を示せ。( *Math. Trip.* 1932 )

**（解答）**

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)&=\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}\\ &\geqq\frac{2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}\cdot 2\sqrt{ab}}{abc}\quad(\because\ \text{相加平均と相乗平均の関係})\\ &=8\end{aligned}$$

であり、不等式は証明された。また、等号成立は相加平均と相乗平均の関係を利用した所での等号成立になり、それは $a=b=c$ の時である。

**【問6】**

$a,b$ が $a+b=1$ をみたす正の数であるとき、

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqq \frac{25}{2}$$

を示せ。( *Math. Trip.* 1926 )

**(解答)**

$$\begin{aligned}
\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{25}{2} &= \left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\right\}^2-2\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)-\frac{25}{2} \\
&= \left(1+\frac{1}{ab}\right)^2-2\left(ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)-\frac{25}{2} \quad (\because\ a+b=1) \\
&= -\frac{23}{2}+\frac{1}{a^2b^2}-2ab-2\frac{(a+b)^2-2ab}{ab} \\
&= -\frac{4(ab)^3+15(ab)^2+4(ab)-2}{a^2b^2} \\
&= \frac{(1-4ab)(a^2b^2+4ab+2)}{a^2b^2} \\
&= \frac{(a-b)^2(a^2b^2+4ab+2)}{a^2b^2} \quad (\because\ 1-4ab=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2) \\
&\geqq 0 \quad (\because a>0, b>0)
\end{aligned}$$

よって示された。また、等号成立条件は明らかに $a=b$ である。

**【問7】**

$a_1,a_2,\dots,a_n$ はすべて正の数とする。そして、$s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とおく。このとき、

$$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \leqq 1+s_n+\frac{{s_n}^2}{2!}+\cdots+\frac{{s_n}^n}{n!}$$

を示せ。( *Math. Trip.* 1909 )

**(解答)**

$$\begin{aligned}
1+s_n+\frac{s_n^2}{2!}+\cdots+\frac{s_n^n}{n!} &= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{s_n^k}{k!} \\
&= 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j_1+\cdots+j_n=k \\ j_h\geqq 0}}\frac{k!}{j_1!j_2!\cdots j_n!}a_1^{j_1}a_2^{j_2}\cdots a_n^{j_n}\right) \\
&\geqq 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{1\leqq i_1<i_2<\cdots<i_k\leqq n}a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}\right) \\
&= (1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)
\end{aligned}$$

**【問８】**

$a_1,a_2,\dots,a_n$ 及び $b_1,b_2,\dots,b_n$ はすべて正の数であり、$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ 及び $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$ とする。このとき、

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$$

を示せ。

**（解答）**

$$\begin{aligned}
\text{右辺}-\text{左辺} &= \sum_{i=1}^{n} a_i\{nb_i-(b_1+b_2+\cdots+b_n)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i(b_i-b_j) \\
&= \sum_{1\leqq i<j\leqq n} (a_i-a_j)(b_i-b_j) \\
&\geqq 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (a_1+a_2+\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots+b_n) \leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)$$

次に等号成立条件を考える。

等号が成立するためには $(a1-a_n)(b_1-b_n)=0$ が成り立つことが必要である。よって、$a_1=a_n$ か $b_1=b_n$ が成り立つことが必要となる。このとき、もし $a_1=a_n$ なら、$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ なので、$a_1=a_2=\cdots=a_n$ となる。同様に、$b_1=b_n$ なら $b_1=b_2=\cdots=b_n$ となる。

よって、等号成立条件は

$$a_1=a_2=\cdots=a_n \text{ または } b_1=b_2=\cdots=b_n$$

である。

**【問９】**

$a,b,x,y$ は有理数であり、

$$(ay-bx)^2+4(a-x)(b-y)=0 \tag{5}$$

を満たしているとする。このとき、次のどちらかが必ず成り立つ。

① $x=a$ , $y=b$

② $1-ab$ , $1-xy$ はともに有理数の 2 乗に等しい。（ *Math. Trip.* 1903 ）

**（解答）**

まず $x=a$ だとするとどうなるかを見ておく。$x=a$ を (5) に代入すると $a^2(y-b)^2=0$ となる。これから、$a=0$ または $y=b$ がわかる。

ここで、$a=0$ の場合を考えると、$x=a=0$ なので、$1-ab, 1-xy$ は共に $1(=1^2)$ であり、(2) が成り立つ。また、$y=b$ なら (1) が成立していることになるので、$x=a$ のときは題意が成立していることになる。

$y=b$ のときも同様の議論で、題意が成立することになるので、$x\neq a, y\neq b$ の場合に (2) が成り立てば、証明が完了する。

(5) の 2 乗の項を次のように 2 種類に変形してみる

$$ay-bx=(a-x)y-(b-y)x \tag{6}$$
$$ay-bx=a(y-b)-b(x-a) \tag{7}$$

(6) を元に考えると

$$\begin{aligned}(5)\text{ の左辺} &= \{(a-x)y-(b-y)x\}^2+4(a-x)(b-y)\\ &= \{(a-x)y+(b-y)x\}^2+4(1-xy)(a-x)(b-y)\end{aligned} \tag{8}$$

であるから、$x\neq a, y\neq b$ なら、(8) より

$$\begin{aligned}1-xy &= -\frac{\{(a-x)y+(b-y)x\}^2}{4(a-x)(b-y)}\\ &= \left\{\frac{(a-x)y+(b-y)x}{ay-bx}\right\}^2 \quad (\because (5))\end{aligned} \tag{9}$$

となり、

同様に (7) を元にすると、

$$\begin{aligned}(5)\text{ の左辺} &= \{a(y-b)-b(x-a)\}^2+4(a-x)(b-y)\\ &= \{a(y-b)+b(x-a)\}^2+4(1-ab)(a-x)(b-y)\end{aligned} \tag{10}$$

であり、(6) を元にしたときと同様にして

$$1-ab=\left\{\frac{a(y-b)+b(x-a)}{ay-bx}\right\}^2 \tag{11}$$

が得られる。(9),(11) より、(2) が成立していることがわかり、【問９】は証明されたことになる。

**【問１０】**

$\sin x$ 及び $\cos x$ はどちらも $x$ の有理関数 (分母と分子が有理数係数の $x$ の多項式) ではないことを示せ。

**【問１１】**

関数 $f(x)$ について、任意の $x$ に対して $f(x)=f(-x)$ が成り立つとき、$f(x)$ を偶関数と呼び、任意の $x$ に対して $f(x)=-f(-x)$ が成り立つとき、$f(x)$ を奇関数と呼ぶ。このとき、どんな関数も必ず偶関数と奇関数の和として表せることを示せ。

**（解答）**

任意に関数 $f(x)$ が与えられているとする。このとき、

$$F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}\ ,\ G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

とおくと、

$$F(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=F(x)$$
$$G(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-G(x)$$

なので、定義から $F(x)$ は偶関数であり、$G(x)$ は奇関数である。また、明らかに $f(x)=F(x)+G(x)$ なので、証明された。

**【問１２】**

方程式 $x^2+px+q=0$ の解は、次の放物線と円の原点以外の交点の $x$ 座標として与えられることを示せ。

$$\begin{cases} y &= x^2 \\ x^2+y^2+(p-1)y+qx &= 0 \end{cases}$$

**【問１３】**

方程式 $x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$ の解は、次の放物線と円の交点の $x$ 座標として与えられることを示せ。

$$\begin{cases} x^2 &= y-\frac{1}{2}nx \\ x^2+y^2+(\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{2}pn+\frac{1}{2}n+q)x+(p-1-\frac{1}{4}n^2)y+r &= 0 \end{cases}$$

**（問１２・１３の解答）**　単なる代入計算で終わるので、省略する。

**【問１４】**

$x=a,b,c$ における値がそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma$ となる 2 次の多項式は

$$\alpha\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\beta\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\gamma\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

である。

$x=a_1,a_2,\ldots,a_n$ における値がそれぞれ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ となる $(n-1)$ 次の多項式について、上と類似の公式を作れ。（安田注 :“ ラグランジュの補間 ” と呼ばれるものです）

**（解答）**

実際にこの式の $x$ に $a,b,c$ を代入すると、そのときの値は $\alpha\beta\gamma$ である。$f(x)$ は同じ性質を持つ 2 次以下の多項式だとする。このとき、

$$g(x)=f(x)-\alpha\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\beta\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\gamma\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

とおけば、$g(x)$ は 2 次以下の多項式であり、明らかに $g(a)=g(b)=g(c)=0$ である。もし、$g(x)$ が定数 0 と異なるなら、1 次か 2 次であるが、方程式 $g(x)=0$ が異なる 3 つの解 $x=\alpha,\beta,\gamma$ を持つことになり、矛盾する。よって、$g(x)=0$ であり、

$$f(x)=\alpha\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\beta\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\gamma\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

であることがわかり、示された。

一般の場合の証明も同様である。

**【問１５】**

$x=0,1,2$ のときの値がそれぞれ $\frac{1}{c},\frac{1}{c+1},\frac{1}{c+2}$ である $x$ の 2 次関数を求めよ。また、この 2 次関数について、$x=c+2$ のときの値は $\frac{1}{c+1}$ であることを示せ。( *Math. Trip.* 1911 )

**（解答）**

問１４の結果から、求める２次関数は

$$f(x)=\frac{1}{c}\frac{(x-1)(x-2)}{2}+\frac{1}{c+1}\frac{(x-2)x}{-1}+\frac{1}{c+2}\frac{x(x-1)}{2}$$

である。

$$\begin{aligned}f(c+2)&=\frac{1}{c}\frac{c(c+1)}{2}+\frac{1}{c+1}\frac{c(c+2)}{-1}+\frac{1}{c+2}\frac{(c+2)(c+1)}{2}\\&=c+1-\frac{c(c+2)}{c+1}\\&=\frac{1}{c+1}\end{aligned}$$

**【問１６】**

次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x^2-a^2}=\left(x^2-2a\cos\frac{\pi}{m}x+a^2\right)\left(x^2-2a\cos\frac{2\pi}{m}x+a^2\right)\cdots\left(x^2-2a\cos\frac{(m-1)\pi}{m}x+a^2\right)$$

**（解答）**

$$\omega_k=\cos\frac{k\pi}{m}+i\sin\frac{k\pi}{m}\quad(k=0,1,2,\cdots,2m-1)$$

とおくとき、方程式 $x^{2m}=1$ の解は $\omega_k$ $(k=0,1,2,\cdots,2m-1)$ なので、

$$\begin{aligned}x^{2m}-1&=\prod_{k=0}^{2m-1}(x-\omega_k)\\ \therefore\quad x^{2m}-a^{2m}&=a^{2m}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{2m}-1\right\}\\&=a^{2m}\prod_{k=0}^{2m-1}\left(\frac{x}{a}-\omega_k\right)\\&=\prod_{k=0}^{2m-1}(x-a\omega_k)\\&=(x-a\omega_0)(x-a\omega_m)\prod_{k=1}^{m-1}(x-a\omega_k)(x-a\omega_{2m-k})\\&=(x^2-a^2)\prod_{k=1}^{m-1}\left\{x^2-a(\omega_k+\omega_{2m-k})x+a^2\omega_k\cdot\omega_{2m-k}\right\}\end{aligned}\tag{12}$$

である。ここで、

$$\omega_{2m-k}=\cos\left(2\pi-\frac{k\pi}{m}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{k\pi}{m}\right)=\cos\frac{k\pi}{m}-i\sin\frac{k\pi}{m}$$

なので、(12) より、

$$x^{2m}-a^{2m}=(x^2-a^2)\prod_{k=1}^{m-1}\left(x^2-2a\cos\frac{k\pi}{m}x+a^2\right)$$

よって、示された。

**【問１７】**

次の等式が成り立つことを示せ。

$$
\begin{aligned}
&x^{2n}-2x^na^n\cos\theta+a^{2n}\\
=\ &\left(x^2-2a\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)x+a^2\right)\left(x^2-2a\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}\right)x+a^2\right)\cdots\left(x^2-2a\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)x+a^2\right)
\end{aligned}
$$

**（解答）**

$$\alpha=\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\ ,\ \omega_k=\cos\frac{2(k-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

とおく。

$$x^2-2a\cos\frac{\theta+2k\pi}{m}x+a^2=(x-a\alpha\omega_k)(x_a\overline{\alpha\omega_k})$$

なので、

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta}{n}+a^2\right)\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+a^2\right)\cdots\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+a^2\right)\\
&=\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2xa\cos\frac{\theta+2(k-1)\pi}{n}+a^2\right)\\
&=\prod_{k=1}^{n}(x-a\alpha\omega_k)(x-a\overline{\alpha\omega_k})
\end{aligned}
$$

ここで、$a\alpha\omega_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は方程式 $x^n=a^n\alpha^n$ の全ての解であり、また $a\overline{\alpha\omega_k}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は方程式 $x^n=a^n\overline{\alpha}^n$ の全ての解であるから、

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n}(x-a\alpha\omega_k)(x-a\overline{\alpha\omega_k})&=a^{2n}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{x}{a\alpha}\right)-\omega_k\right\}\left\{\left(\frac{x}{a\overline{\alpha}}\right)-\overline{\omega_k}\right\}\\
&=a^{2n}\left\{\left(\frac{x}{a\alpha}\right)^n-1\right\}\left\{\left(\frac{x}{\overline{a\alpha}}\right)^n+1\right\}\\
&=(x^n-a^n\alpha^n)(x^n-a^n\overline{\alpha}^n)\\
&=x^{2n}-a^n(\alpha^n+\overline{\alpha}^n)x^n+a^{2n}|\alpha|^n\\
&=x^{2n}-2x^na^n\cos\theta+a^{2n}
\end{aligned}
$$

となり、示された。

**【問１８】**

方程式 $x^6-2x^3+2=0$ の全ての解を求めよ。( *Math. Trip.* 1910 )

**（解答）**

問１７において、

$$n=3\ ,\ a^n\cos\theta=1\ ,\ a^{2n}=2$$

となるようにすると、問題の方程式は 2 次式の積に因数分解できるので、全ての解を求めることが可能となる。これは、$a=\sqrt[6]{2}$ と取り、$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる $\theta$ を一つ取れば満たされることになるが、今の場合、具体的に $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ ととればよい。この準備のもとで

$$\begin{aligned}&x^6-2x^3+2\\ =&\left(x^2-2\sqrt[6]{2}\cos\frac{\pi}{12}\cdot x+\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2-2\sqrt[6]{2}\cos\frac{3\pi}{4}\cdot x+\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2-2\sqrt[6]{2}\cos\frac{17\pi}{12}\cdot x+\sqrt[3]{2}\right)\end{aligned}$$

ここで、2 倍角の公式を考えると

$$2\cos^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}+1=\frac{2+\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ \cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$2\cos^2\frac{17\pi}{12}=\cos\frac{17\pi}{6}+1=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\ \cos\frac{17\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\quad x^6-2x^3+2=\left(x^2-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[3]{2}}x+\sqrt[3]{2}\right)(\,x^2+\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{2}\,)\left(x^2-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[3]{2}}x+\sqrt[3]{2}\right)$$

よって、2 次方程式の解の公式から

$$x=\frac{\sqrt{3}+1\pm(\sqrt{3}-1)\,i}{2\sqrt[3]{2}}\ ,\ \frac{-1\pm i}{\sqrt[3]{2}}\ ,\ \frac{\sqrt{3}-1\pm(\sqrt{3}+1)\,i}{2\sqrt[3]{2}}$$

**【問１９】**

$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_kx^k$ とする。さらに、$\omega^n=1$ であり、$\omega^m=1$ となる最小の自然数 $m$ が $n$ であるとする (安田コメント：訳し間違いかも知れないが、本には、$\omega$ は $x^n=1$ の 1 以外の解とする、 と書いてあるが、これだと $n=4,\omega=-1$ で反例を示せる)。さらに、$\lambda=\left[\dfrac{k}{n}\right]$ を超えない最大の整数とする（[ ] はガウス記号である)。このとき、次の式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\{f(x)+f(\omega x)+\cdots+f(\omega^{n-1}x)\}=a_0+a_nx^n+a_{2n}x^{2n}+\cdots+a_{\lambda n}x^{\lambda n}$$

**（解答）**

負でない整数 $i$ を $n$ で割ったときの商を $p_i$ 余りを $q_i$ とする（$0\leqq q_i<n$)。ここで、$0\leqq i\leqq k$ のとき、$p_i$ が取り得る値は $0,1,2,\cdots,\lambda$ であり、

$$i=p_in+q_i\quad(\,0\leqq q_i<n\,)\tag{13}$$

以上の準備のもとで

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\{f(x)+f(\omega x)+\cdots+f(\omega^{n-1}x)\} &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} a_i(\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{ij})x^i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} a_i\left\{\sum_{j=0}^{n-1}((\omega^n)^{p_i}\cdot\omega^{q_i})^j\right\}x^i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k} a_i\left\{\sum_{j=0}^{n-1}(\omega^{q_i})^j\right\}x^i \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ここで、$q_i=0$ となる場合は $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(\omega^{q_i})^j=n$ であり、$0<q_i<n$ となる場合は $\omega^{q_i}\neq 1$ なので

$$
\sum_{j=0}^{n-1}(\omega^{q_i})^j=\frac{1-(\omega^{q_i})^n}{1-\omega^{q_i}}=0 \quad (\because\ \omega^n=1)
$$

となる。

ところで、$q_i=0$ となるのは (13) から $i$ が $n$ の倍数のときであり、(14) から【問１９】が成り立つことがわかる。

**【問２０】**

次の極限値を求めよ。( *Math. Trip.* 1934 )

$$
\lim_{n\to\infty} n^{-n-1}(n+1)^n
$$

**（解答）**

$$
\text{与式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0 \qquad (\because\ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e\ )
$$

**【問２１】**

$n$ 個の正の数 $x_1,x_2,\dots,x_n$ があり、この $n$ 個の中には、1 以外の数があるとする。

またさらに、$x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ であるとする。このとき、$m$ が 1 より大きな有理数であれば

$$
x_1^m+x_2^m+\cdots+x_n^m>n
$$

が成り立つことを示せ。( *Math. Trip.* 1934 )

**【問２２】**

$\alpha > \beta > 0$ とし、漸化式 $\begin{cases} u_1 &=& \alpha + \beta \\ u_n &=& \alpha + \beta - \dfrac{\alpha\beta}{u_{n-1}} \ (n > 1) \end{cases}$ で決まる数列 $\{u_n\}$ について、

$$u_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \tag{15}$$

であることを示せ。また、次の極限値を決定せよ。

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

さらに、$\alpha = \beta$ の場合について、論ぜよ。( *Math. Trip.* 1933 )

**(解答)**

与えられた漸化式から、$u_n = \alpha$ なら、$\beta \neq 0$ より $u_{n-1} = \alpha$ が導かれるので、帰納的に $u_1 = \alpha$ でなければならないが、漸化式から $u_1 = \alpha + \beta$ なので、$\beta = 0$ となってしまい矛盾する。よって、任意の $n$ について $u_n \neq \alpha$ である。同様にして $u_n \neq \beta$ である。

漸化式は次のように 2 種類の変形ができる。

$$u_n - \alpha = \beta \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1}} \tag{16}$$

$$u_n - \beta = \alpha \frac{u_{n-1} - \beta}{u_{n-1}} \tag{17}$$

$u_n - \beta \neq 0, \alpha \neq 0$ なので (16) を (17) で割って

$$\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{u_{n-1} - \alpha}{u_{n-1} - \beta}$$

となる。ここで、$v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ , $r = \dfrac{\beta}{\alpha}$ とおくと、$v_n$ に関する漸化式

$$v_n = r v_{n-1} \quad , \quad v_1 = \frac{\beta}{\alpha} = r$$

が得られる。これから $v_n = r^n$ がわかる。これを $u_n$ の関係に書き直すと $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = r^n$ となり、分母を払い整理すると

$$(r^n - 1)u_n = \beta r^n - \alpha$$

となる。ここで、$0 < r < 1$ より $r^n - 1 \neq 0$ なので、

$$u_n = \frac{\beta r^n - \alpha}{r^n - 1} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} \tag{18}$$

がわかり、(15) が示された。また、(18) から

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\beta r^n - \alpha}{r^n - 1} = \alpha$$

がわかる。

次に $\alpha=\beta$ の場合を考える。(15) を変形すると

$$
\begin{aligned}
u_n-\alpha &= \alpha\frac{u_{n-1}-\alpha}{u_{n-1}} \\
\frac{1}{u_n-\alpha} &= \frac{1}{\alpha}\frac{u_{n-1}}{u_{n-1}-\alpha}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{u_{n-1}-\alpha}
\end{aligned}
$$

ここで $w_n=\dfrac{1}{u_n-\alpha}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
& w_n=\frac{1}{\alpha}+w_{n-1} \quad , \quad w_1=\frac{1}{u_1-\alpha}=\frac{1}{\alpha} \\
& \therefore w_n=w_1+\frac{n-1}{\alpha}=\frac{n}{\alpha} \\
& \therefore u_n=\alpha+\frac{\alpha}{n}
\end{aligned}
$$

また、最後に得られた式から、

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\alpha$$

であり、極限については、$\alpha\neq\beta$ の場合と同じになることがわかる。

問題文が「$\alpha=\beta$ の場合について答えよ」ではなく、「$\alpha=\beta$ の場合について論ぜよ」となっているので、単に上の解答で良しとしないで論じてみたい事がある。それは次回の数実研で話す題材に取っておきたいと思う。

**【問２３】**

$$\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$$

であるとき、方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

は、0 と 1 の間に少なくとも一つ解を持つことを示せ。

**（解答）**

$$f(x)=\quad\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^n+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}x^2+a_nx$$

とおくと、平均値の定理から、

$$f(1)-f(0)=f'(c)\ (=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\cdots+a_n\ ) \quad , \quad 0<c<1$$

を満たす $c$ が存在する。

$$f(1)-f(0)=\left(\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2}+a_n\right)-0=0$$

なので、証明された。