平成21年11月28日（土）

難しい問題に仕上げる

第71回数学実践研究会

安田 富久一

【 発展問題 】

$$f(x,y,z)=\frac{\bigl||x-y|+x+y-2z\bigr|+|x-y|+x+y+2z}{4}$$

とする。以下の各問に答えよ。

① $|x|+x$ の最小値を求めよ。

② $f(a,b,b)$ を簡単にし、$f(a,b,b)$ を簡単な言葉（文章）で表現せよ。

③ $f(a,b,c)$ を簡単な言葉（文章）で表現し、正しいことを示せ。

【解答①】

- **数直線上、点 $x+|x|$ は、点 x を右方向に $|x|$ だけ移動した所**
- **点 $x+|x|$ は、原点より左になることはない**

$$\therefore \quad |x|+x \geqq 0$$

- $x=0$ **のとき、** $|x|+x=0$ **である**
- **以上のことから、求める最小値は** 0 **である**

【こちらの証明の方が普通（多い）か？】

- $x \geqq 0$ **のとき** $|x|+x=x+x=2x \geqq 0$
- $x<0$ **のとき** $|x|+x=-x+x=0$

$$\therefore \quad |x|+x \geqq 0$$

【解答②】

$$\begin{aligned} f(a,b,b) &= \frac{\big||a-b|+a-b\big|+|a-b|+a+3b}{4} \\ &= \frac{|a-b|+a-b+|a-b|+a+3b}{4} \\ &= \frac{|a-b|+a+b}{2} \\ &= \frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2} \end{aligned}$$

- **aとbの中点を、右方向へaとbの距離の半分だけ移動した所**
- **その点はaとbの小さくない方の点を示す。**
- **つまり、$f(a,b,b)$はa,bの最大値を示す。**

【解答③】

- n個の数$a_1, a_2, \cdots, a_n$の最大値を$\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$で表す
- $\dfrac{|a-b|+a+b}{2} = \max(a, b)$ である

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \frac{\big||a-b|+a+b-2c\big| + |a-b|+a+b+2c}{4} \\
&= \frac{|\max(a,b)-c| + \max(a,b)+c}{2} \\
&= \max\big(\max(a,b), c\big) \\
&= \max(a,b,c)
\end{aligned}
$$

- $f(a,b,c)$はa, b, cの最大値を示す。

【経緯】

- $\max(a,b) = \dfrac{|a-b|+a+b}{2}$ に数学セミナーで出会った。
- 衝撃的だった。
- $\max(a,b)$ が簡単な式で書けている。
- よく考えれば思いついて当たり前の式。
- この式を高校生に伝える策略を練ったのがレポートの趣旨。
- $\max(a,b) = \dfrac{|a-b|+a+b}{2}$ を少し弄くってみた。
- $\max(a,b,c) = \max\big(\max(a,b),c\big)$ を考えてみた。
- そして $\dfrac{\big||x-y|+x+y-2z\big|+|x-y|+x+y+2z}{4}$ となった。

【対称性を大切に】

- $f(x,y,z)$ は x と y について対称（ $f(x,y,z)=f(y,x,z)$ ）
- $f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)$ とすれば x,y,z について対称
- $f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)=\max(x,y,z)$ なので

$$
\begin{aligned}
\max(x,y,z) &= \frac{f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)}{3} \\
&= \frac{1}{12}\Big\{ \big||x-y|+x+y-2z\big| \\
&\qquad +\big||y-z|+y+z-2x\big| \\
&\qquad +\big||z-x|+z+x-2y\big| \\
&\qquad +|x-y|+|y-z|+|z-x| \Big\} \\
&\quad +\frac{1}{3}(x+y+z)
\end{aligned}
$$

【複雑だけどいいことが】

- 右辺はx, y, zについて対称性がある
- 一般性は失わないので$x \geqq y \geqq z$とすると

$$
\begin{aligned}
&\big||x-y|+x+y-2z\big| = 2|x-z| = 2(x-z) \\
&\big||y-z|+y+z-2x\big| = 2|y-x| = 2(x-y) \\
&\big||z-x|+z+x-2y\big| = 2|x-y| = 2(x-y) \\
&|x-y| = x-y \\
&|y-z| = y-z \\
&|z-x| = x-z
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \textbf{右辺} = \frac{8x-4y-4z}{12} + \frac{1}{3}(x+y+z) = x = \max(x, y, z)
$$