平成21年11月28日（土）

実数解の個数に関するスツルム問題

第71回数学実践研究会

安田 富久一

【 $x^3-3x^2-x+1=0$ の $-2<x<2$ での実数解の個数 】

- $f_0(x)=x^3-3x^2-x+1$ とおく。
- $f_1(x)=f_0{}'(x)=3x^2-6x-1$ とおく。
- $f_2(x):f_0(x)\div f_1(x)$の余りに-1をかける$\longrightarrow f_2(x)=\dfrac{2}{3}(4x-1)$ である。
- $f_3(x):f_1(x)\div f_2(x)$の余りに-1をかける$\longrightarrow f_3(x)=\dfrac{37}{16}$ である。
- $f_0(-2),f_1(-2),f_2(-2),f_3(-2)$ の4つの値の符号変化の回数$\longrightarrow V(-2)$

$f_0(-2)$	$f_1(-2)$	$f_2(-2)$	$f_3(-2)$	$V(-2)$
$-$	$+$	$-$	$+$	3

- $f_0(2),f_1(2),f_2(2),f_3(2)$ の4つの値の符号変化の回数$\longrightarrow V(2)$

$f_0(2)$	$f_1(2)$	$f_2(2)$	$f_3(2)$	$V(2)$
$-$	$-$	$+$	$+$	1

- $V(-2)-V(2)=3-1=2$ が $-2<x<2$ での実数解の個数

【Sturmのエッセンス】

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= f(x)\\
f_1(x) &= f\,'(x)\\
f_{n-1}(x) &= q_n(x)f_n(x) - f_{n+1}(x) \quad (n = 1, 2, \cdots, m-1)
\end{aligned}
$$

（ $f_{n-1}(x)$ を $f_n(x)$ で割ったときの商が $q_n(x)$ 余りが $-f_{n+1}(x)$ ）

$$f_{m-1}(x) = q_m(x)f_m(x)$$ （ 割り切れたらやめる ）

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\cdots\cdots$	$f_m(x)$	$V(x)$
a						$V(a)$
b						$V(b)$

$a < x \leqq b$ における実数解の個数 $= V(a) - V(b)$

【 *Sturm* の定理 】

方程式 $f(x)=0$ について、
$x=a,b$がともに$f(x)=0$の重解ではないとき、
区間 $a<x\leqq b$ にある実数解の個数は $V(a)-V(b)$ に等しい。
但し、重解は1個と数えるものとする。

【証明のための予備知識】

- 「$f(a)=f\,'(a)=0$」と「$x=a$が$f(x)=0$の重解である」こととは同値
- 中間値の定理

  特に多項式$f(x)$について、
  xがaからbへ値を大きくしていったときに$f(x)$が符合を変えるなら、
  $f(x)$はaとbの間に必ず実数解を持つ
- $\dfrac{k}{x-a}+$(連続関数) の値は、$x=a$を境に符号$+$と$-$が入れ変わる

【証明のポイント】

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x) \\ f_1(x) &= f\,'(x) \\ f_{n-1}(x) &= q_n(x)f_n(x) - f_{n+1}(x) \quad (n = 1, 2, \cdots, m-1) \end{aligned}$$

（ $f_{n-1}(x)$ を $f_n(x)$ で割ったときの商が $q_n(x)$ 余りが $-f_{n+1}(x)$ ）

$$f_{m-1}(x) = q_m(x)f_m(x)$$ （ 割り切れたらやめる ）

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$\cdots\cdots$	$f_m(x)$	$V(x)$
a						$V(a)$
x						$V(x)$
b						$V(b)$

$a < x \leqq b$ における実数解の個数 $= V(a) - V(b)$

【Sturmの定理の存在価値 】

- 方程式 $4x^4-4x^3-8x^2+6x-1=0$ の解の個数は簡単にわかるか？
- 微分すると $16x^3-12x^2-16x+6$ で、有理数範囲での因数分解は無理？
- では、増減表は無理？
- (かなり大変な数になるが）3次方程式の解の公式を使って何とかなる
- では、6次方程式は？
- 微分すると5次の多項式で、根号と四則を有限回使っての解の公式はない。
- スツルムの方法なら、そのような心配はない。