R ≧ 2r について
―レーマスの不等式

北数教“第６０回数学教育実践研究会” レポート

会 場　ニッセイＭＫビル４階会議室

日 時　平成19年2月3日14:00～17:20

北海道遠軽郁凌高等学校　安 田 富久一

以前、北海道千歳北陽高等学校の高倉先生が、京都大学の入学試験問題に関わるレポートを発表されていた。

> 「三角形の外接円の半径の長さを R、内接円の半径の長さを r とすると、$R \geqq 2r$ が成り立つ」

という内容のものです。

本レポートは、これに関係のある、1988 年 7 月号数学セミナーの記事の紹介である。当時、九州大学の矢ヶ部巌先生がお書きになった『レーマスの不等式と発します』で、元の記事は、先生と 2 名の学生の対話形式で話が進む数学的な示唆に富む記事である。図書館等でバックナンバーを取り寄せ、是非元の記事に接してもらえればと思う。「$R \geqq 2r$」と今回紹介するレーマスの不等式が同値だという話しが出てくる。レーマスの不等式一つを元にして、それにまつわるいろいろな話が登場し、非常に面白いので是非紹介したいと思った。

【レーマスの不等式】

$a > 0, b > 0, c > 0$ のとき、

$$abc \geqq (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

が成り立っ。

等号が成り立つのは、$a = b = c$ のときに限る。

この不等式の証明がいくつも紹介されている。

$$\Gamma = abc - (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

とおく。$\Gamma \geqq 0$ を示すことになるが、Γ は a, bn, c についての対称式なので、$a \leqq b \leqq c$ と仮定して話を進めてよい。

【代数的証明（一)】　レーマスによる証明 (1820 年)

$b - a = m$, $c - b = n$ とおく。このとき、仮定から a, m, n は 0 以上である。

$$\Gamma = am^2 + (a+2n)mn + (a+n)n^2$$

Γ の右辺の 3 項はどれも負ではないので、$\Gamma \geqq 0$ であることがわかる。

また、同じ理由から、$\Gamma = 0$ となるのは、どの項も 0 のときで、

$$m = n = 0 \text{ つまり } a = b = c$$

のときに限る。(証明終わり)

【代数的証明 (二)】　ホールとナイトの二人による証明 (1895 年)

$$x = b+c-a\ ,\ y = c+a-b\ ,\ z = a+b-c$$

とおく。x, y, z が全て正の時とそうではないときに分けて話を進める。

1. [x, y, z が全て正のとき]

$$
\begin{aligned}
abc &= \frac{y+z}{2}\frac{z+x}{2}\frac{x+y}{2} \\
2 &\geqq xyz \quad (\because \text{ 相加平均} \geqq \text{相乗平均}) \\
&= (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)
\end{aligned}
$$

より、不等式は示された。等号成立は第 2 式で等号が成立する場合なので、$x=y=z$ つまり、$a=b=c$ のとき。

2. [x, y, z のうち少なくとも一つが 0 以下のとき]

$$x+y=2c\ ,\ y+z=2a\ ,\ z+x=2b$$

なので、x, y, z のうちの少なくとも二つが正ではないとすると、a, b, c のうちの、少なくとも一つは正ではなくなり矛盾する。よって、x, y, z のうち二つが正で、残りの一つのみが 0 以下となる。

$$\therefore\ xyz \leqq 0 < abc$$

であるから、不等式は成り立ち、しかも等号は成り立たない。

以上より証明された。

【代数的証明 (三)】 ペアノによる証明 (1902 年)

$\Gamma = f(abcr)$ とおく。

$$f(ka, kb, kc) = k^3 f(a, b, c)$$

であるから、Γ は a, b, c について対称な 3 次の同次式である。よって、Γ は

$$
\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3\ , \\
&(b+c)a^3+(c+a)b^2+(a+b)c^2\ , \\
&abc
\end{aligned}
$$

に定数をかけて加えたものとなり、Γ の係数を考慮して

$$
\begin{aligned}
\Gamma &= (a^3+b^3+c^3)+\{-(b+c)^2-(c+a)b^2-(a+b)c^2\}+3abc \\
&= \{a^3-(b+c)a^2+abc\}+\{b^3-(c+a)b^2+bca\}+\{c^3-(a+b)c^2+cab\} \\
&= a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)
\end{aligned}
$$

最初の二項で共通因数に着目すると

$$
\begin{aligned}
a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a) &= (a-b)(a^2-ac-b^2+bc) \\
&= (a-b)\{(a^2-b^2)-c(a-b)\} \\
&= (a-b)^2(a+b-c)
\end{aligned}
$$

ここで、a, b, c を巡回的に変えて次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a) &= (a-b)^2(a+b-c) \\
b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) &= (b-c)^2(b+c-a) \\
c(c-a)(c-b)+a(a-b)(a-c) &= (c-a)^2(c+a-b) \\
\therefore\ 2\Gamma = (a-b)^2(a+b-c)&+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b)
\end{aligned}
$$

であることがわかる。よって、

$$a+b-c>0\ ,\ b+c-a>0\ ,\ c+a-b>0$$

ならば、$\Gamma \geqq 0$ であることがわかる。また、$\Gamma=0$ となるのは、どの項も 0 になるときであり、それは $a=b=c$ のときに限る。

$$a+b-c>0\ ,\ b+c-a>0\ ,\ c+a-b>0$$

でない場合は、前証明同様 $\Gamma>0$ となる。(証明終わり)。

【代数的証明 (四)】　ワトソンによる証明 (1953 年)

前証明でみたことから、

$$\Gamma=(b-c)^2(b+c-a)+a(a-b)(a-c)$$

である。$a \leqq b \leqq c$ より、$\Gamma \geqq 0$ である。等号成立については、

$$(b-c)^2(b+c-a)=0\ ,\ a(a-b)(a-c)=0$$

だが、$a \leqq b \leqq c$ から $b+c-a \geqq b>0$ なので、第 1 式から $b=c$ がわかる。これをさらに第 2 式に用いて

$$a(a-b)^2=0$$

であり、$a=b$ つまり、$a=b=c$ である。また、逆に $a=b=c$ のとき $\Gamma=0$ は明らかである。(証明終わり)。

証明を将棋に例え、次のような登場人物の会話がある。『将棋でいうと、ワトソンさんは素直に王手をして詰めているのに、ペアノのさんはキレイな詰手筋証明-対称性-にこだわって回り道をしている感じですね』。回り道、と書いてあるが、記事全体を通してみて、決して悪い意味で使っている言葉ではないように思った。

“シューアの不等式”について見ていく。レーマスの不等式の拡張になっている。ハーディ、リトルウッド、ポリア共著の『不等式』(1934 年出版）という本に紹介されている。

【シューアの不等式】

$\mu \geqq 0, a>0, b>0, c>0$ のとき、

$$a^\mu(a-b)(a-c)+b^\mu(b-c)(b-a)+c^\mu(c-a)(c-b) \geqq 0$$

かなりたつ。等号成立は $a=b=c$ のときに限る。

上述ワトソンは「この結果に興味をもち、簡単な証明を発見した」として、1953 年に論文を書いた。このアイデアを μ=1 のときに適用したのがさきほどの証明。

【シューアの不等式の証明】

$$
\begin{aligned}
& a^\mu(a-b)(a-c)+b^\mu(b-c)(b-a)+c^\mu(c-a)(c-b) \\
=& \{a^\mu(a-c)-b^\mu(b-c)\}(a-b)+c^\mu(c-a)(c-b) \\
=& \{(a^{\mu+1}-b^{\mu+1})-c(a^\mu-b^\mu)\}(a-b)+c^\mu(c-a)(c-b) \\
=& \{(a^{\mu+1}-b^{\mu+1})-c(a^\mu-b^\mu)-b^\mu(a-b)\}(a-b)+b^\mu(a-b)^2+c^\mu(c-a)(c-b) \\
=& \{(a^{\mu+1}-b^\mu a)-c(a^\mu-b^\mu)\}(a-b)+b^\mu(a-b)^2+c^\mu(c-a)(c-b) \\
=& (a^\mu-b^\mu)(a-c)(a-b)+b^\mu(a-b)^2+c^\mu(c-a)(c-b)
\end{aligned}
$$

かなりたつ。ここから後はこれまでと同様 (証明終わり)。

この不等式の情報を、ワトソンはハーディに問い合わせた。ハーディは、シューアからの手紙で、この不等式を知った。ワトソンのと同じ証明も付けられていた。それが対称性を活用した変形ではないのを、ハーディは残念がっている。ワトソンは対称性を活用する変形へ挑んだが、1953 年の論文では、μ が 1 と 2 の場合しか成功していない。1 の場合について、変形の概要は次のとおり。

【対称性を活用した変形 $\mu=1$ の場合】

Γ において、a を $t(a+b)$ で置き換えると

$$\Gamma=(b+c)\{(t+1)(t-1)^2(b-c)^2+(2t-1)^2tbc\}$$

となる。ここで、t を $\dfrac{a}{(b+c)}$ へもどす。

$$(b+c)^2\Gamma=(a+b+c)(b-c)^2(a-b-c)^2+abc(2a-b-c)^2$$

が得られる。この式で a,b,c を巡回的に置き換えて得られる 2 つの式を加え

$$
\begin{aligned}
& \{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\Gamma \\
=& (a+b+c)\{(b-c)^2(a-b-c)^2+(c-a)^2(b-c-a)^2+(a-b)^2(c-a-b)^2\} \\
& +abc\{(2a-b-c)^2+(2b-c-a)^2+(2c-a-b)^2\}
\end{aligned}
$$

が導かれる。

これからレーマスの不等式が証明される（証明 V ）。

1955 年の論文では、対称性を利用して

$$
\begin{aligned}
& 2(a+b+c)\Gamma \\
=& 2\{bc(b-c)^2+ca(c-a)^2+ab(a-b)^2\} \\
& +\{(b-c)^2(a-b-c)^2+(c-a)^2(b-c-a)^2+(a-b)^2(c-a-b)^2\}
\end{aligned}
$$

を示している（レーマスの不等式の証明 VI)。

次に、シューアの不等式の拡張（μ が $\mu<0$ でも成り立つこと）を見ていく。

シューアの不等式の左辺を、$f(a,b,c;\mu)$ で表す。

$$f(a,b,c;\mu)=abc\cdot f(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c},-\mu-1)$$

となるので、$\mu \leqq -1$ のときも、シューアの不等式は成り立つ。

残るのは、$-1 < \mu < 1$ の場合。二項ずつまとめる。先ほどの計算で

$$a^\mu(a-b)(a-c) + b^\mu(b-c)(b-a) = (a^{\mu+1} - b^{\mu+1})(a-b) + c(b^\mu - a^\mu)(a-b)$$

であったが、これを巡回的に置き換えてさらに得られる2つの式を加えて

$$\begin{aligned} 2f(a,b,c;\mu) = (a^{\mu+1} - b^{\mu+1})(a-b) + (b^{\mu+1} - c^{\mu+1})(b-c) + (c^{\mu+1} - a^{\mu+1})(c-a) \\ +c(b^\mu - a^\mu)(a-b) + a(c^\mu - b^\mu)(b-c) + b(a^\mu - c^\mu)(c-a) \end{aligned}$$

となり、この後は先ほどまでと同じ論法で処理される。これが1953年でのワトソンの結果。

次に、レーマスの不等式の幾何学的証明をみる。代数的証明のIIのところで見たように、

$$b + c - a > 0\ ,\ c + a - b > 0\ ,\ a + b - c > 0$$

の場合のみを考えれば良かった。これから、a, b, c を三辺の長さに持つ三角形が存在することがわかる。三角形について、チャプルの定理（1746年）またはオイラーの定理（1765年）と呼ばれている次の定理がある。

【チャプルの定理　オイラーの定理】

三角形ABCの内接円の半径の長さを r、外接円の半径の長さを R とすると、

$$R \geqq 2r$$

が成り立つ。等号成立は、正三角形の時に限る。

これは、三角形ABCの内心を I、外心を O とするとき

$$OI^2 = R^2 - 2rR$$

となることに由来している。

【レーマスの不等式の幾何的証明】

三角形ABCの面積を S とすると、面積の公式、正弦定理から

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A$$
$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$
$$\therefore \quad R = \frac{abc}{4S}$$

また、この結果と、よく知られた

$$r = \frac{2S}{a+b+c}$$

から、

$$R^2 - 2rR = \left(\frac{abc}{4S}\right)^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

となる。また、ヘロンの公式を右辺第二項に適用すると

$$R^2 - 2rR = \frac{abc}{16S^2}\{abc - (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)\} = \frac{abc}{16S^2}\Gamma$$

が得られ、チャプル（オイラー）の定理から $R^2 - 2rR \geqq 0$ を考えると、$\Gamma \geqq 0$ であり、しかも等号は正三角形の場合、つまり $a = b = c$ のときに限ることがわかる。

レーマスの不等式と $R \geqq 2r$ が同値であることは、バルツァーが 1870 年に証明したそうだ。