動く曲線で遊んでみる

NPO 数学みえる化プロジェクト
安田富久一

【曲線を動かしてみる】

時刻 θ の経過とともに曲線が動いていく様子を調べて遊んでみる。

$$C_\theta : \left(t + \frac{2\theta t}{\sqrt{4t^2+1}} \,,\, t^2 - \frac{\theta}{\sqrt{4t^2+1}} \right) \quad (-2 \leqq t \leqq 2) \tag{1}$$

と表す。曲線 C_θ を描く。

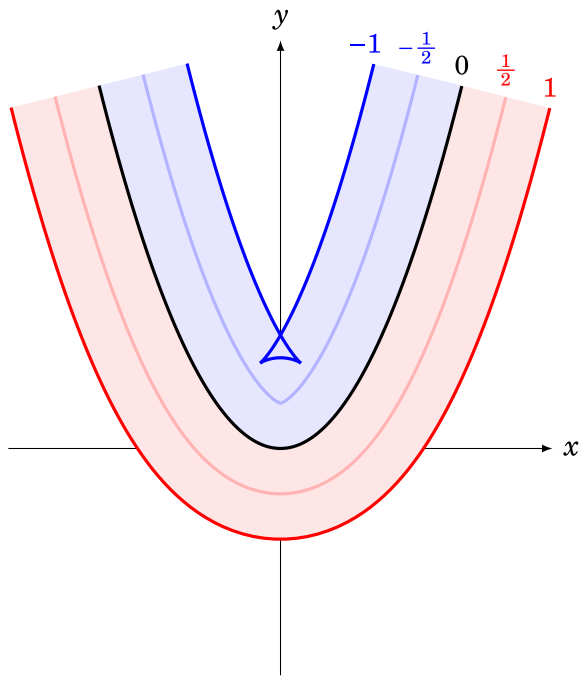
$$x_\theta(t) = t + \frac{2\theta t}{\sqrt{4t^2+1}} \quad , \quad y_\theta(t) = t^2 - \frac{\theta}{\sqrt{4t^2+1}}$$

$$\frac{dx_\theta}{dt} = \frac{\sqrt{(4t^2+1)^3}+2\theta}{\sqrt{(4t^2+1)^3}} \quad , \quad \frac{dy_\theta}{dt} = 2t \cdot \frac{\sqrt{(4t^2+1)^3}+2\theta}{\sqrt{(4t^2+1)^3}} = 2t\frac{dx_\theta}{dt} \tag{2}$$

$\sqrt{(4t^2+1)^3} \geqq 1$ より $\theta > -\dfrac{1}{2}$ なら、明らかに $\dfrac{dx_\theta}{dt} > 0$。

$\theta < -\dfrac{1}{2}$ のときを考える。$\sqrt{4t^2+1} = A$, $\sqrt[3]{-2\theta} = B$ とおくと、$\sqrt{(4t^2+1)^3} + 2\theta = A^3 - B^3$ なので、$A \gtreqless B$ と $\sqrt{4t^2+1} \gtreqless \sqrt[3]{-2\theta}$ は同値であり、今得た不等式は $t^2 \gtreqless \dfrac{\sqrt[3]{4\theta^2}-1}{4}$ と同値。

$$\frac{dx_\theta}{dt} \begin{cases} > 0 & \left(|t| > \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4\theta^2}-1}}{2} \right) \\[2ex] < 0 & \left(|t| < \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{4\theta^2}-1}}{2} \right) \end{cases}$$



(2) より C_θ は右図のようになる。

C_θ は $\theta = 0$ の時の $y = x^2$ を基準にして、C_0 の各点で法線方向に距離 θ 進んだ点の軌跡が $C_{\pm\theta}$ として (1) は作ってある。

$\theta > 0$ で θ を増加させていくと、C_θ は C_0 と似た（？）下に凸な曲線として変わっていくが、$\theta < 0$ で θ を減少させていくと、C_θ は $\theta = -\dfrac{1}{2}$ を境にして自己交差し始める。

チュートリアル | 応用数理の最前線『動く局面を追いかけて』
儀我美一・陳蘊剛 著（日本評論社）

を読んでいたら、等速成長の局面の運動というのが出てきた（22 ページ)。(直感的に）常に外側に速さ 1 で成長する曲面、と書かれている。正確には、法線方向に早さ 1 で動いていく局面になるが、曲面を曲線に変え、更に単純化して最初の曲面 C_0 の法線方向を保ったまま（各 θ での C_θ の各点の法線を考えるわけではなく、という意味)、動かしてみたらどうなるかを遊んでみたのが上記である。

【 有名な事実で遊ぶ 】

＜楕円座標＞

$\rho > 1$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とし、次の楕円と双曲線を考察する

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left\{\dfrac{1}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\right\}^2}+\dfrac{y^2}{\left\{\dfrac{1}{2}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\right\}^2}=1 & \text{（楕円）} \quad (3) \\ \dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=1 & \text{（双曲線）} \quad (4) \end{cases}$$

（注）

(3),(4) は、複素関数論の等角写像で出てくるジューコフスキー変換

$$z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{5}$$

で同心円（$|z|=\rho$）と放射線（$\arg z=\theta$）を変換したものであり、楕円座標というものとも関連している。これを元に次のように遊んでみる。

(i) $|\zeta|=\rho$, $\arg\zeta=\theta$ のとき、(5) で決まる $z=x+iy$ の x,y を ρ と θ で表してみよう。

(ii) 原点中心の円及び原点を始点とする半直線は (5) によりどのような図形に移るか？

(iii) 任意の ρ,θ について、(3) と (4) は直交するだろうか。

(iv) x 軸以外の点は、(3),(4) の交点になっている。

(v) 上記交点を通る楕円・双曲線を与える ρ , θ は唯一つ決まる。

【 遊んでみます 】

(i) $\zeta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ なので、

$$\begin{aligned} x+iy &= \frac{1}{2}\left\{\rho(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\rho}(\cos\theta-i\sin\theta)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta+i\ \frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta \end{aligned}$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\theta\ ,\ y=\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\theta \tag{6}$$

(ii) 原点中心の円：(i) で ρ が定数の場合である。

θ のみパラメーターの (6) の曲線（θ 消去）

$$\text{楕円：}\frac{x^2}{\left\{\dfrac{1}{2}\left(\rho+\dfrac{1}{\rho}\right)\right\}^2}+\frac{y^2}{\left\{\dfrac{1}{2}\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)\right\}^2}=1 \tag{7}$$

原点を始点とする半直線：(i) で ρ が定数の場合である。

ρ のみパラメーターの (6) の曲線（ρ 消去）

$$x\sin\theta + y\cos\theta = \rho\sin\theta\cos\theta$$

$$x\sin\theta - y\cos\theta = \frac{1}{\rho}\sin\theta\cos\theta$$

$$\text{双曲線：}\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 1 \tag{8}$$

(iii) 点 $P(x_0, y_0)$ を 2 曲線 (3) , (4) の交点とする。P での (3),(4) の法線ベクトルは次のベクトル $\overrightarrow{n_3}$, $\overrightarrow{n_4}$ にそれぞれ平行

$$\overrightarrow{n_3} = \left(\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 x_0 \ , \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 y_0\right)$$

$$\overrightarrow{n_4} = \left(x_0\sin^2\theta \ , -y_0\cos^2\theta\right)$$

$$\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_4} = \left\{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)x_0\sin\theta\right\}^2 - \left\{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)y_0\cos\theta\right\}^2 \tag{9}$$

(7) , (8) より、

$$\begin{pmatrix} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 & \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {x_0}^2 \\ {y_0}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \\ \sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix} \tag{10}$$

(9) より

$$\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_4} = \left(\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2\sin^2\theta \ , \ -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\cos^2\theta\right)\cdot\begin{pmatrix} {x_0}^2 \\ {y_0}^2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 & \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \\ -\sin^2\theta & \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\left(\text{但し、}\Delta = 2\cos2\theta - \left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} &\left(\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2\sin^2\theta \ , \ -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\cos^2\theta\right)\begin{pmatrix} -\cos^2\theta & -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \\ -\sin^2\theta & \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \left(4\sin^2\theta\cos^2\theta \ , \ -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{13}$$

(10)～(13) より、

$$\overrightarrow{n_3}\cdot\overrightarrow{n_4} = \frac{1}{\Delta}\left(4\sin^2\theta\cos^2\theta \ , \ -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2 \\ \sin^2\theta\cos^2\theta \end{pmatrix} = 0$$

よって、(3) と (4) は直交する。

(iv) $y \neq 0$ とし、(3),(4) を満たす ρ, θ があることを示せばよい。

まず ρ について、(3) は

$$4x^2\rho^2(\rho^2-1)+4y^2\rho^2(\rho^2+1)=(\rho^4-1)^2$$

$$(\rho^4-1)^2-4x^2\rho^2(\rho^2-1)-4y^2\rho^2(\rho^2+1)=0 \tag{14}$$

$$\lim_{\rho\to+0}\left\{(\rho^4-1)^2-4x^2\rho^2(\rho^2-1)-4y^2\rho^2(\rho^2+1)\right\}=-8y^2<0$$

$$\lim_{\rho\to\infty}\left\{(\rho^4-1)^2-4x^2\rho^2(\rho^2-1)-4y^2\rho^2(\rho^2+1)\right\}>0$$

なので、(14) は $\rho>1$ に解を持つ、つまり、(3) は $\rho>1$ に解を持つ。

次に θ について、(4) は

$$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$\sin^4\theta+(x^2+y^2-1)\sin^2\theta-y^2=0 \tag{15}$$

X の 2 次方程式 $X^2+(x^2+y^2-1)X-y^2=0$ は $0<X\leqq 1$ に解を持つので、(15) から、$0<\sin^2\theta\leqq 1$ となる θ があれば示されたことになるが、$0<\theta<\pi$ なので存在することは明らか。

(v) まず、(4) について調べる。異なる θ で (4) を満たすことはないことを示す。
$0<\alpha,\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ $(\alpha\neq\beta)$ とし、(4) の θ に α,β を代入して整理する。

$$x^2\sin^2\alpha-y^2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$x^2\sin^2\beta-y^2\cos^2\beta=\sin^2\beta\cdot\cos^2\beta$$

$$\therefore\ (-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta)y^2=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot(\cos^2\alpha-\cos^2\beta)$$

$$(\sin^2\alpha-\sin^2\beta)y^2=\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot(\sin^2\beta-\sin^2\alpha)$$

$$\therefore\ y^2=-\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta<0 \quad (\because\ \sin\alpha\neq\sin\beta)$$

$y^2\geqq 0$ に矛盾。よって、(4) について示された。

(3) について調べる。ω を用いて

$$\frac{x}{\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)}=\cos\omega\ ,\ \frac{y}{\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)}=\sin\omega \tag{16}$$

と表せる。これを用いると

$$\frac{x^2}{\cos^2\omega}-\frac{y^2}{\sin^2\omega}=1$$

よって、(4) の θ のところが ω になって成立していることになり、先ほど示したことから、$\omega=\theta$ である。(16) より、

$$\frac{x}{\cos\theta}+\frac{y}{\sin\theta}=\rho$$

ところで、θ は x,y により只一通りに定まっていたので、ρ は x,y により只一通りに定まることが示された。 （遊び終了）

（注 1）　(3),(4) の楕円群と双曲線群は、お互い直角に交わり、その交点は y 軸以外を埋め尽くす。しかも、その交点を与える楕円と双曲線は只一通りに決まる。このことから、極座標 (r,θ) のように (ρ,θ) を点の曲線座標（参照：注 2）とみると、それぞれの座標軸が直交していることになる。

（注 2）直交曲線座標

『岩波講座 応用数学 いろいろな幾何 I』一松信（著）／岩波書店

の 9 ページにある上記座標の説明を参考にして紹介する。

【 直交曲線座標 】

各 1 パラメータの互いに直交する曲線族による座標がある。それを**直交曲線族**と呼ぶ。その大半は、平面を複素数平面と見なしたとき、適当な解析関数によって直交座標または極座標を変換した座標と解釈できる。（以下略）

主な直交曲線座標

名称	等パラメータ曲線族	原座標	$f(z)$
極	原点中心の円と放物線	直交	e^z
放物線	原点を焦点、横軸を主軸とする右・左向きの放物線	直交	z^2
直角双曲線	$x^2-y^2=a\,,\,xy=b$	直交	$z^{1/2}$
双　円	原点を通り、横軸・縦軸上に中心を持つ円	直交	$\dfrac{1}{z}$
双　極	2 定点 ±1 を通る円と、比が一定のアポロニウスの円	極	$\dfrac{z+1}{z-1}$
楕　円	2 定点 ±1 を通る楕円と双曲線	極	$\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$

（注 3）　2 ページの (3),(4),(5) について、数学セミナー増刊

入門|現代の数学 [3] 『流体力学と複素解析』今井功一（著）／日本評論社

では、ジューコフスキー変換を $\dfrac{a}{2b}\left(z+\dfrac{b^2}{z}\right)$ としている。楕円群・双曲線群を計算すると

$$\frac{x^2}{\left\{\dfrac{a}{2b}\left(\rho+\dfrac{b^2}{\rho}\right)\right\}^2}+\frac{y^2}{\left\{\dfrac{a}{2b}\left(\rho-\dfrac{b^2}{\rho}\right)\right\}^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\theta}-\frac{y^2}{a^2\sin^2\theta}=1$$

となる。これで 2 ページ中段からの遊びをすると、見かけ上難しそうな遊びになる。

（注 4）　2 ページ以降について、実は、(3) の楕円群を動く曲線とみて、(4) を (3) の曲線上の点の動いた跡と思って遊んだものである。