第 122 回数学教育実践研究会

近似値遊び

レポート

令和 4 年 11 月 26 日 (土)
Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

ニュートン法で $\sqrt{2}$ の近似値を求めて遊んでみる。漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \tag{1}$$

$$a_1 = 2 \tag{2}$$

を考えると、$a_n \to \sqrt{2}$ である。最初の数項を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= \frac{3}{2} && = 1.5 \\
a_3 &= \frac{17}{12} && = 1.41\dot{6} \\
a_4 &= \frac{577}{408} && = 1.4142156862745\cdots \\
a_5 &= \frac{665857}{470832} && = 1.4142135623746\cdots \\
a_6 &= \frac{886731088897}{627013566048} && = 1.41421356237309\cdots
\end{aligned}$$

憶えておくようにと先生から言われる近似値 1.4142 が a_4 段階で得られている。また、参考書によく書いてある 1.414213562 は a_5 で得られている。手元にある数 I の教科書の実数の説明のところには $1.41421356237309\cdots$ と書いてあった。それは a_6 で出現している。

ここで、収束が比較的速いと思われるテイラー展開はどうなんだろうと思ってやってみて、びっくり**!**

$$\sqrt{x+p} = \sqrt{p}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n! \cdot 2^n p^n} x^n\right\} \quad (|x| < |p|)$$

を基にして、p を 2 に近い小数第 1 位までの小数に取ろう。$1.4^2 = 1.96$ なので、$p = 1.96 \left(= 1.4^2 = \frac{49}{25}\right)$, $x = 2 - p = 0.04 \left(= 0.2^2 = \frac{1}{25}\right)$ とし、

$$b_n = \frac{7}{5}\left\{1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{k!}\left(\frac{1}{98}\right)^k\right\} \tag{3}$$

とおくと $b_n \to \sqrt{2}$ であり、数項求めてみると

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{99}{70} && = 1.4142857142857 14\cdots \\
b_2 &= \frac{19403}{13720} && = 1.414212827988338\cdots \\
b_3 &= \frac{380299}{268912} && = 1.414213571726066\cdots \\
b_4 &= \frac{149077207}{105413504} && = 1.414213562239616\cdots \\
b_5 &= \frac{10435404491}{7378945280} && = 1.414213562375137\cdots \\
b_6 &= \frac{2045339280233}{1446273274880} && = 1.414213562373062\cdots
\end{aligned}$$

非常に見事に b_1 段階で既に 1.4142 が得られている（暗記しておくように、と指示するものが出てきている ! ）。すごい。教材としてインパクトがあるように思う。惜しむらくは数IIIの範囲を超えたテイラー展開。でも、b_1 であるのは救いではないか。数IIIの平均値の定理 or 近似式の教材に使えそうだ。数III教科書に

1 次の近似式

$h \fallingdotseq 0$ のとき $\qquad f(a+h) \fallingdotseq f(a) + f'(a)h$

というのがあった。これを使ってみる。

$$\sqrt{2} = \sqrt{1.96 + 0.04} = \sqrt{1.96} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1.96}} \cdot 0.04 = \frac{99}{70} = 1.4142857142857 14\cdots$$

1.4142 が出てきている（1 次の近似式は b_1 なので、出て当然だが)。

この見事さは、$p = 1.96 = \dfrac{49}{25}$, $x = \dfrac{1}{25}$ と設定したのが良かったからかもしれない。ニュートン法の近似：漸化式 (1),(2) において、初期値 a_1 を 2 ではなく $1.4 = \dfrac{7}{5}$ としてみたらテイラー展開利用の (3) と同様の凄いことになるかも知れない。実験！

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}\left(c_n + \frac{2}{c_n}\right) \quad , \quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{7}{5} && = 1.4 \\ c_2 &= \frac{99}{70} && = 1.414285714285714\cdots \\ c_3 &= \frac{19601}{13860} && = 1.414213564213564\cdots \\ c_4 &= \frac{768398401}{543339720} && = 1.414213562373095\cdots \end{aligned}$$

c_2 は言葉上は第 2 項と 2 だけど、計算という意味では、計算 1 回目ということであり、b_2 と求める操作回数という意味では同レベル。しかも、c_3 は b_2 よりも近似精度は上がっている。さらに、c_4 で数 I 教科書に書かれている精度まで一致している。

【 余談：近似評価 】

$n \geqq 2$ とする。$c_n > \sqrt{2}$ である（帰納法)。また、$c_1 - \sqrt{2} = \dfrac{7}{5} - \sqrt{2}$, $\dfrac{7}{5} < \sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$ より、$\left|c_1 - \sqrt{2}\right| = \dfrac{1}{5\left(7 + 5\sqrt{2}\right)} < \dfrac{1}{50} = \dfrac{2}{10^2}$ がわかる。

$$\begin{aligned} \left|c_n - \sqrt{2}\right| &= \frac{1}{2c_{n-1}} \left|c_{n-1} - \sqrt{2}\right|^2 \qquad (4) \\ &= \frac{1}{2c_{n-1} \cdot (2c_{n-2})^2} \left(\left|c_{n-2} - \sqrt{2}\right|^2\right)^2 \quad (\because\ (4)) \\ &= \frac{1}{2c_{n-1} \cdot (2c_{n-2})^2 \cdots (2c_1)^{2^{n-2}}} \left|c_1 - \sqrt{2}\right|^{2^{n-1}} \quad (\because\ (4)) \\ &< \frac{1}{(2\sqrt{2})^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-3}}} \cdot \frac{1}{2^{2^{n-2}}} \cdot \frac{2^{2^{n-1}}}{(10^2)^{2^{n-1}}} \\ &= \frac{1}{2^{2^{n-3}-2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{10^{2^n}} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left|c_n - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{2^{2^{n-3}-2}} \cdot \frac{1}{10^{2^n}} \quad (n \geqq 2) \tag{5}$$

ちょと遊んでみよう。教科書にある小数第 14 位まで正確に知るための n はどれくらいまで求めたら良いだろうか、次のように考えてみる。(5) の右辺が 10^{-15} より小さくなれば大丈夫そう。

$$\frac{1}{2^{2^{n-3}-2}} \cdot \frac{1}{10^{2^n}} < 10^{-15}$$

この不等式を常用対数 $\log_{10} 2 = 0.3010$ を使って解いてみる。

$$\begin{gathered} 2^n - 15 > (2^{n-3} - 2)\log_{10} 2 \\ (8 - \log_{10} 2)2^{n-3} > 15 - 2\log_{10} 2 \\ 2^{n-3} > \frac{14.398}{7.699} = 1.870113001688531 \\ n - 3 \geqq 1 \quad \therefore \ n \geqq 4 \end{gathered}$$

確認してみよう。$n = 4$ とすると、

$$\begin{gathered} \left|c_4 - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{10^{16}} \\ c_4 - 0.\underbrace{0\cdots0}_{16\text{ 個}}1 < \sqrt{2} < c_4 + 0.\underbrace{0\cdots0}_{16\text{ 個}}1 \\ c_4 = \frac{768398401}{543339720} = 1.41421356237309505\cdots \\ 1.41421356237309504\cdots < \sqrt{2} < 1.41421356237309506\cdots \\ \therefore \ \sqrt{2} = 1.4142135623730950\cdots \end{gathered}$$

確かに、教科書にある近似値が得られている。しかも、教科書に示されている 1.41421356237309 よりも 2 桁も良い精度で。

（注）テイラー展開で述べた方法では、（ここには示さないが）小数第何桁まできっちり合っているかの評価では精度は余り期待できないようだ。

【 付記：問題作りに役立つ素材になるかも 】

p.1 の (3) のところで、x, p が非常に綺麗な分数になってくれていた。

$$2 = x^2 + p^2 \quad , \quad x = \frac{1}{5} \ , \ p = \frac{7}{5}$$

分母が 5 ということで小数点以下の位数情報も掴みやすかった。