第 122 回数学教育実践研究会

チョイムズ問題作成法

レポート

令和 4 年 11 月 26 日 (土)
Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

問題 1

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$$

（解答）
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\sqrt{k}-(k-1)\sqrt{k-1}+\sqrt{k-1}\right\}\\&=n\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1}\qquad(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k-1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k-1}{n}}\\&=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^1=\frac{2}{3}\qquad(2)\end{aligned}$$

(1),(2) より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

【 舞台裏 】

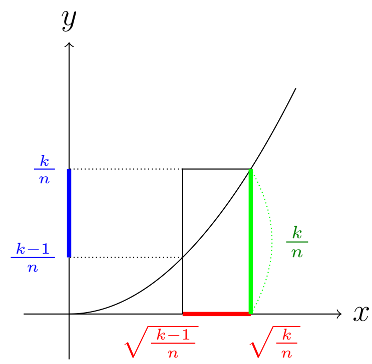
$\int_0^1 x^2\,dx$ の区分求積：x 軸上の $[0,1]$ を n 等分して k 番目の区間 $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ での関数値を区間の右端に取り、

$$\int_0^1 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}$$

この区分分割を y 軸にあわせて取ってみるとどうなるか。$y=x^2$ の値域 $[0,1]$ を n 等分して k 番目の区間 $\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ に対応する x 軸上の区間は

$$\frac{k-1}{n}\leq x^2\leq\frac{k}{n}\quad,\quad\sqrt{\frac{k-1}{n}}\leq x\leq\sqrt{\frac{k}{n}}$$

より $\left[\sqrt{\frac{k-1}{n}},\sqrt{\frac{k}{n}}\right]$ なので、



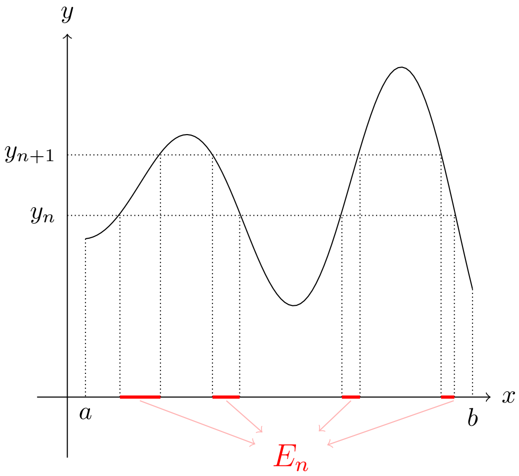
$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\,dx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}-\sqrt{\frac{k-1}{n}}\right)\\\Longrightarrow&\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)\text{：問題の式}\end{aligned}$$

【 余談（背景）：遊んでみた<ルベーグ和> 】

区間 $[a,b]$ で定義された非負値函数 $y=f(x)$ がある。非負数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は狭義単調増加し、$y_1=0\,, y_n\to\infty\ (n\to\infty)$ であるとする。y 軸を区間 $[y_{n-1},y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ に分割する。この分割 Δ を元に x 軸の区間 $[a,b]$ を、次のように互いに共通点を持たない集合 E_n に分割する。

y 軸の分割 Δ の

$$E_n=\{x\in[a,b]\mid y_n\leqq f(x)<y_{n+1}\}$$
$$[a,b]=\sum_{n=1}^{\infty}E_n$$



E_n を構成する切れ切れの区間の長さの総和を E_n の測度と言い、$m(E_n)$ と表す。

$$\underline{S}(\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n\cdot m(E_n)$$
$$\bar{S}(\Delta)=\sum_{n=1}^{\infty}y_{n+1}\cdot m(E_n)$$

最大長さが 0 に近づくように分割幅を細かくしていくとき、$\displaystyle\lim_{\Delta\to 0}\underline{S}(\Delta)=\lim_{\Delta\to 0}\bar{S}(\Delta)$ となるなら、この極限値をルベーグ和と言う。

このイメージについて、理論構成を厳密に遂行させてできあがったのがルベーグ積分らしい。高校でこれを完全に教材とする訳にはいかなくても、このルベーグ和を、数IIIで学習する区分求積法のように分割 Δ を n 等分してみたら教材ができないか、と考えてみたのが 問題 1 である。

【 遊びついでに（更に難しく） 】

$y=\log x\ (0\leqq x\leqq e)$ で同じように n 等分でルベーグ和を考えてみる。値域が $[0,1]$ なので、全ページの舞台裏と同様 $\dfrac{k-1}{n}\leqq y\leqq\dfrac{k}{n}$ を与える x 軸の領域を求めると、$e^{\frac{k-1}{n}}\leqq x\leqq e^{\frac{k}{n}}$ である。これから

$$\int_1^e\log x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

が成り立っているはず。そこで、

問題 2

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

（解答）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{n}}}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\left.\frac{d}{dx}e^{x}\right|_{x=0}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[\,xe^x\,\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=1$$

$$\therefore\quad\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)=1$$

（解答終わり）

確認のために $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$ を計算してみると

$$\int_1^e \log x\,dx=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^e=1$$

【 付記 】

最初に示した 問題 1 、いきなりは無茶という場合の一案。

問題 1 提示例

次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ の定義が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=f(1)+f(2)+\cdots+f(n)$

であることを用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(2^k-2^{k-1})$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)=\boxed{}$

の右辺枠に当てはまる答えを次の (a)〜(d) から選べ。

(a) $f(0)$　(b) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$　(c) 0　(d) 該当なし

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}k\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$ を求めよ。

【 勧誘 】

高校では学習しない数学を高校数学の世界に埋め込めるようなものを、大学で学習した内容の中から探してみませんか！