第 122 回数学教育実践研究会

対称のいろいろな姿

レポート

令和 4 年 8 月 27 日 (土)
Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

第 121 回数実研で次の本の第 12 章「固定的な見方を止めてヘロンの公式を見る」の第 1 節を紹介した。

『阿草的葫蘆－文化活動中的数学』曹亮吉 (著)

財団法人遠哲科学教育基金会（出版）2000 年 4 月 第 2 版

第 1 節のタイトルは「ヘロンの公式で何を教える！」で、今回のレポートは第 2 節「対称が持つ様々な層（原タイトル：対称有多層面)」である。前回同様、私の感覚フィルター：

- 中国語を正しく読めているかどうか不明
- いくつかの節を一つにまとめたり、順を変えたりしている
- キーワードのみ示しているところがある
- 本文にない個人の感想的言葉を書いている
- 本にはないことを加えている

を通しての紹介である。

1　序

対称はいろいろな場面で顔を出す。数学では

- 幾何図形：点対称、線対称、面対称
- 関数：偶感数、奇関数
- 鏡像

として登場する。以下に様々な対称を考えてみたい。

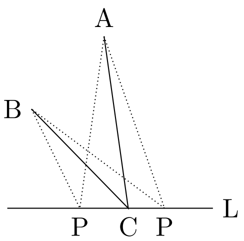
2　位置対称

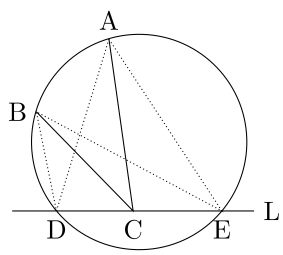
本では“地位対称”と書かれている。

(1)　数直線上の 2 点 $x = a, x = b$ が点 $x = c$ を対称の中心として対称である、というのは c が a と b の（相加）平均値になっていることである。相加ではなく相乗平均としてかけ算の対称を考えてみたら、どうなる・・・？

なんと、平方根の値を求めるニュートンの漸近法が！

(2)　直線 L の片側に 2 点 A, B がある。L 上の点で 2 点 A, B を見たときの視覚が一番大きくなる点を C とする。L 上の動点 P が点 C を左から右に横切るとき、∠APB は増加した後減少する。点 D を点 C の左側にある点とすると、点 C の右側に ∠ADB = ∠AEB となる点が必ずある。このとき、D, E は C を中心とする対称な位置にあるということにしよう。このような対称を考えるとどんないいことがある・・・？



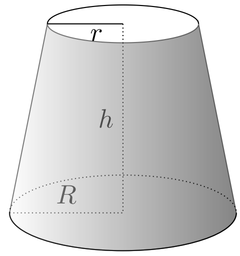


(3)　課題：“直線 L 上の点 C で AC + BC を最短にする”を解決するために、D が L 上にあるとして、C を基準として L 上の反対側に E を AD + BD = AE + BE となるように取る。

D, E は点 C を中心とする対称の位置にあると考えると、どんないいことがある・・・？

3　役割対称

ヘロンの公式は対称式だった。その対称性は三角形の三辺の長さについて、三辺の長さが違っていて、その役割（例えば左の辺と右の辺）を替えても面積は変わらないということに起因するものだった。これを役割対称（本に書いてある原語：角色対称）と呼ぶことにしよう。役割対称を持つ公式（劇のシナリオ）は俳優同士の中で役を取り換えても劇が変わらないようになっていないといけない。



円錐台を考える。上底面の円の半径を r、下底面の円の半径を R、高さを h とする。直感的にこの体積 V は h に比例すると思える。これに次元的な観点を加えて、

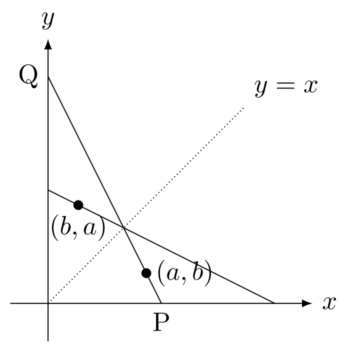
$$V = f(r, R) \cdot h$$

になるだろう。

$f(r, R)$ は次元及び役割対称の観点での考察から、r, R の 2 次の対称式になる。そこで、

$$V = \{\alpha(r^2 + R^2) + \beta rR\}h \quad (\alpha, \beta \text{ は定数})$$

とき、$R = r$ 及び $r = 0$ の特殊状況を考えて $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\beta = \dfrac{1}{3}\pi$ がわかり、公式は $V = \dfrac{1}{3}(R^2 + rR + r^2)h$ と見通せる。



もう一つ例を見てみよう。第 1 象限に点 (a, b) があり、この点を通る直線を描き、両軸との交点を右図のように P, Q とする。このとき、線分 PQ の最小値 L はいくらか？　を考える。次元的考察及び役割対称から、L の公式は a, b の対称式になる。

$$L = \alpha(a + b)$$

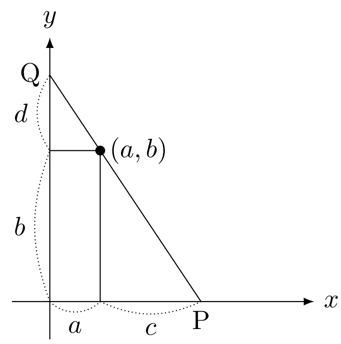
として、α を求めると、異なる値が得られ、L は 1 次式ではないことがわかる。

そこで、L^2 が a, b の 2 次式として表せないか試してみよう（ヘロンの公式はそうだった）。

$$L^2 = \alpha(a^2 + b^2) + \beta ab$$

として $\alpha = 1, \beta = 6$ を得る。つまり、次式となる

$$\mathrm{L}^2 = a^2 + b^2 + 6ab$$



これは我々が得たかった公式だろうか? 実は検証してみると、これも我々が得たかった公式ではないことがわかる。というのは、PQ が点 (a, b) を通りさえすれば（右図）、$ab = cd$ が成り立つ。これから $\mathrm{PQ}^2 \geqq a^2 + b^2 + 6ab$ であることがわかり、我々が得たい公式にはなっていないことがわかる。

数学的な厳密さのために微積分を用いて求めてみると、

$$\mathrm{L} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}\right)^3}$$

であることがわかる。この例から、次のような教訓が得られる。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{・対称等の観点からの考察は不合理な公式を炙り出すが} \\ \text{・正確な公式が得られるとは限らない}\end{array}\right.$$

4　過程対称

対称にはまだ更に高みにあるものがある。（推理）過程に現れる対称である。例えば正弦定理の証明で

$$\frac{a}{\sin \mathrm{A}} = 2R$$

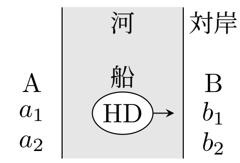
が一旦示されると、直ぐに“同様に”（同じ理由で）$\dfrac{b}{\sin \mathrm{B}} = \dfrac{c}{\sin \mathrm{C}} = 2R$ が示される。“同様に”とは、その過程が完全に平行に進むということであり、a を b に、A を B に、置き換えるということに他ならない（この結果は役割対称の観点でも得られる）。

5　河渡しの采配

“河渡し”の次の問題は非常に面白い。3 人のグループが 2 組ある。どちらのグループにもリーダーが 1 人いる。船頭と一匹の犬が乗った一艘の船がある。船を漕ぐことができるのはリーダー 2 人と船頭しかいない。船の積載量は人間 2 人かまたは人間 1 人と犬一匹である。船頭がいないと犬は人を咬んでしまう。リーダーがいなくなったグループと他のグループのリーダーがいると、他のグループのリーダーはリーダー不在のグループのメンバーを虐げる。このような状況下で、何回かの船の往復で人・犬すべてを平安のうちに対岸に渡すことができるか？

少し考えていくと一つの結論が浮かんできたことと思う。「まず、最初は船頭と犬が対岸に向かって往き、犬を対岸において船頭一人が戻ってこないといけない」。更に次のようなことも思い当たっているだろう：「4 往復した後、第 5 回目の対岸に向かう船の上は、右図のような状況になっている」（A, B はそれぞれのリーダー、H は船頭、D は犬、楕円は船、船の横の矢印は船が進む方向を示す）。

【5 回目対岸往き状況】



この図の本質的なところは A, B の役割、a, b の役割が同じところである。つまり、上図は対称の状況にある。この対称ということをじっくり考えると、往った後の帰りはその前の過程と反対の方法をすることになる。しかも、A と B を、a_1 と b_1 を入れ替えるとよい。例えば、4 回目の往き帰りの状況、及び 5 回目の帰り 6 回目の往きについては次の図：

【4 回目対岸往き状況】　【4 回目の帰り状況】　【5 回目の帰り状況】　【6 回目の往き状況】