第 120 回数学教育実践研究会

（続）こんな授業をしてみたい
芳賀の定理（折り紙）

レポート

令和 4 年 1 月 29 日 (土)
Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

こんな授業をしてみたい（芳賀の定理）

0　初めに

今回のレポートでは、『この（値・式・$\cdots$）を求めよ』『・・・を示せ・証明せよ』などのタイプの問題練習ではなく、

- 『（法則などに）気づく』
- 『気づいたことを（数学的・科学的な言葉で本質を抽出した形に）表現する』
- 『数学化して得た式が示す事柄を具象世界の内容に読み替える』

といった能力を養う授業をしたい、という思いの授業作り案である。本資料の目次は

である。**3 授業作り** が本題であり、**1 芳賀の定理** や **2 誤差について** は、本題を説明するときに出てくる式がどんな意味の式なのか、の単なる説明である。**4 付録** については、レポート発表ではほとんど触れない。

1　芳賀の定理

折り紙（図 1）がある。頂点 A を下辺 CD の中点に重なるように折る（図 2）。$A'B'$ と BC の交点を P とする。

このとき、P は BC の三等分点になる。この事実は芳賀の定理と呼ばれている。

図 1

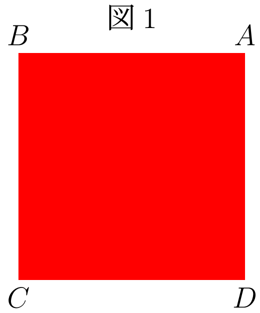
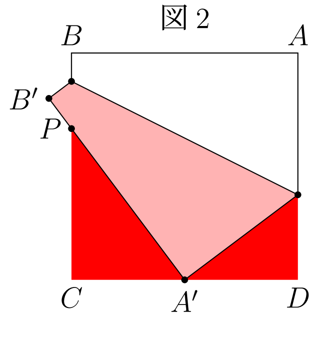


図 2



2　誤差について

実際に折り紙すると、A' を下辺の中点に正確に重ねるということは奇跡的出来事。そこで、A' がずれて置かれて発生する三等分点との誤差について考えたい。

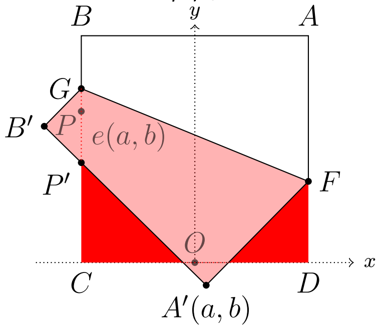
中点に重ねようとしてずれてしまうという状況を考えると、中点からずれる時の誤差が増えるスピードが気になる（微分係数）。

横ずれ、縦ずれのどちらが誤差（目的からずれる被害）が大になるかを調べる。縦・横以外に一般のずれについても調べる。

下辺中点を原点 O とする座標軸（右図 3）を設定し、正方形の一辺の長さを L、$L=2\ell$ と置き、出現近似点 P' の y 座標から真の三等分点 P の y 座標（$=\frac{2}{3}L=\frac{4}{3}\ell$）を引いた値 $e(a,b)$ は、

$$e(a,b)=\frac{(19b-8a)\ell^2+(-16b^2+6ab-8a^2)\ell+3b^3+3a^2b}{9\ell^2+(6a-12b)\ell+3b^2-3a^2} \tag{1}$$

図 3



2.1　横ずれ・縦ずれ

A' が縦にずれないように横に a だけずれた場合の三等分点のずれを $\widetilde{e}(a)=e(a,0)$、横にずれないように縦に b だけずれた場合の三等分点のずれを $\overline{e}(b)=e(0,b)$ とすると、それぞれ次のようになる。

$$\widetilde{e}(a)=\frac{8a\ell}{3a-9\ell} \quad , \quad \overline{e}(b)=\frac{b(3b^2-16b\ell+19\ell^2)}{3b^2-12b\ell+9\ell^2} \tag{2}$$

$$\left|\frac{d\,\widetilde{e}}{da}(0)\right|=\frac{8}{9} \quad (=0.\dot{8}) \quad , \quad \left|\frac{d\,\overline{e}}{db}(0)\right|=\frac{19}{9} \quad (=2.\dot{1}) \tag{3}$$

比較して、縦ずれは横ずれの $\frac{19}{8}$、つまり 2 倍強の被害を被る。縦ずれしないように注意を払うべき！

3　授業作り

【 授業 I 】

(I)　1 辺 15 ㎝の折り紙を折って、芳賀の定理の事実を気づかせる（前回数実研で発表済み内容）。

(II)　上記後、正方形の 1 辺の長さを $L=2$：$\ell=1$ として。$\widetilde{e}(a)$, $\overline{e}(b)$ を計算させる。

$$\widetilde{e}(a)=\frac{8a}{3a-9} \tag{4}$$

$$\overline{e}(b)=\frac{b(3b^2-16b+19)}{3b^2-12b+9} \tag{5}$$

(III)　$\dfrac{d\,\widetilde{e}}{da}(0)$, $\dfrac{d\,\overline{e}}{db}(0)$ を求めよ、と指示。

$$\frac{d\,\widetilde{e}}{da}=\left(\frac{8a}{3a-9}\right)'=-\frac{8}{a^2-6a+9} \quad \therefore \left|\frac{d\,\widetilde{e}}{da}(0)\right|=\frac{8}{9}$$

この程度ならまだしも、

$$\frac{d\,\overline{e}}{db}=\left(\frac{b(3b^2-16b+19)}{3b^2-12b+9}\right)'=\frac{b^4-8b^3+24b^2-32b+19}{b^4-8b^3+22b^2-24b+9} \quad \therefore \left|\frac{d\,\overline{b}}{da}(0)\right|=\frac{19}{9}$$

は導関数計算がちょっと面倒感がある。

(IV)　微分係数の“定義にしたがって”$\dfrac{d\,\widetilde{e}}{da}(0)$ を計算するように指示。

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widetilde{e}(h)-\widetilde{e}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{8}{3h-9}=-\frac{8}{9}$$

この計算をやり終え、教師が『 $\dfrac{d\,\overline{e}}{db}(0)$ を計算せよ 』と指示するのを待たずに実行している生徒がいることを期待したい。

(V)　$\dfrac{d\,\overline{e}}{db}(0)$ について、実行している生徒が

$$\begin{cases} \text{いた場合} & \Longrightarrow \quad \text{教師の指示を待たずに積極的に行動していることを誉める。} \\ \text{いない場合} & \Longrightarrow \quad \text{教師の指示を待たずに行動する姿勢の大切さを話す。} \end{cases}$$

(VI)　発問『 $\widetilde{e}$, $\overline{e}$ 以外にも、このような簡単な計算が可能な関数はあるか？』。

(i)発問『 $\dfrac{d\,\widetilde{e}}{da}(0)$, $\dfrac{d\,\overline{e}}{db}(0)$ 』が微分係数の定義から簡単に得られた理由 (原因）は何か？』

(ii)発問『 どんな関数なら同じようなことが言えるか？』

(iii)発問『 それを $f(x)$ という関数記号を使うと、どう表現出来るか？』

【 授業 II 】

(I)　一辺の長さを限定せず、L や ℓ のまま (2) を扱う。

（授業 I）の後に、『L や ℓ で求めると (2) になる』と生徒に伝えて授業を進めてもよい。

(II)　$\dfrac{d\widetilde{e}}{da}(0)$, $\dfrac{d\overline{e}}{db}(0)$ を計算させ、次のことを期待する。

(i)　$\dfrac{d\widetilde{e}}{da}(0) = -\dfrac{8}{9}$, $\dfrac{d\overline{e}}{db}(0) = \dfrac{19}{9}$ となるが、『 ℓ が消えている 』ことに気づけるか！

(ii)　式が示す様相から、『誤差が増える速さは一辺の長さに関係しない』という具象世界の音を聞き取れる（読み替える）能力を養う。

4　付録

今回は以上のことについての発表であるが、実際に授業では以下のことも取り入れてみたいと思っている（但し、**4.2 誤差の平均** の **一般のずれ** については、高校の範囲をはるかに越える。累次積分的な話しになり、今回授業で触れない予定である)。

4.1　一般のずれ：どの方向にずれるのが一番得？：方向微分を教える

上記の **2 横のずれ・縦のずれ** は、そのまま偏微分という考えを伝えることが出来る。そして、これから示す『どの方向にずれると誤差の増加スピードが少なくなるか？』は方向微分という考えを伝えられる。

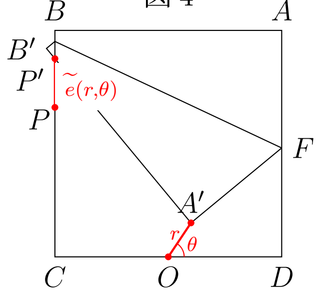
横ずれ、縦ずれという理想化を少し緩めて、辺 CD と何度の角度でずれると良いかを調べる。辺 CD と角度 θ の方向に A' がずれて行くときの誤差の増加スピードは、$A'(a,b)$ の座標を極座標（図 4）で

$$(a,b) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

としておき、θ は一定、r が変化する微分：方向微分、を考えれば良い。

$\widetilde{e}(r,\theta) = e(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく。

図 4



$$\widetilde{e}(r,\theta) = e(r\cos\theta, r\sin\theta)$$
$$= -\frac{(3\sin\theta)r^3 + (3\sin 2\theta + 4\cos 2\theta - 12)\ell r^2 + (19\sin\theta - 8\cos\theta)\ell^2 r}{(3\cos 2\theta)r^2 + (12\cos\theta - 6\cos\theta)\ell r - 9\ell^2}$$
$$\therefore \quad \frac{\partial \widetilde{e}}{\partial r}(0,\theta) = \frac{19\sin\theta - 8\cos\theta}{9}$$

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{9}{18} = 22.8343276205493^\circ \fallingdotseq 23^\circ$ となる角度の時に誤差増加が最も少ない状況になる。

お勧めは 約 23°。

4.2 誤差の平均

実際に折り紙するとどれくらい三等分点からずれるか？ 確率の期待値を考える。下辺の中点 O に重ねようと思っているのだから、O からある程度離れた処に A' が来ることはない。そこで、A' は 1 ㎜以内に置かれると想定し、2 つの状況を想定する。

【 横ずれ・縦ずれの場合 】

(I)＜一様分布＞

O の左右 0.1 以内どこも同様の確からしさで A' が置かれる（下図 6）

確率密度関数：$f_0(x) = 5 \quad (-0.1 \leqq x \leqq 0.1)$

(II)＜中心が高い分布＞

O に近いほど A' が置かれる可能性は高く 0.1 離れた処以上に A' は来ない（下図 7）

確率密度関数：$f_1(x) = \begin{cases} 10 + 100x & (-0.1 \leqq x < 0) \\ 10 - 100x & (0 \leqq x \leqq 0.1) \end{cases}$

図 6

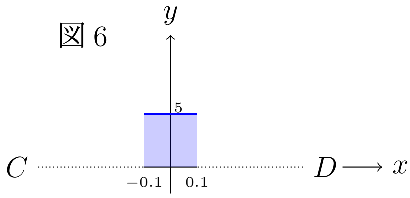
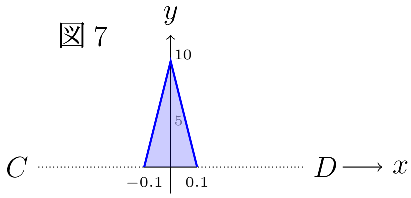


図 7



一般のずれの場合は次のように密度関数が 3 次元版になり、期待値は重積分となる。

【 一般ずれの場合 】