第 118 回数学教育実践研究会

こんな授業をしてみました
楕円 の 導入

レポート

令和 3 年 8 月 28 日 (土)
Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

＜こんな授業をしてみました：楕円の導入＞

0.1　授業の目標・目的

楕円の導入だが、楕円の話をすることが目的ではない。楕円の導入を利用して『図形と方程式』の方程式が何故図形なのか、等の基本事項の認識や試行錯誤及び実験すること等について、

『わかって問題が解けているんだろうか？』

『計算（実験）できる状況なのに、計算（実験）せずに悩んでいるだけでは何も始まらないだろう』

・・・、と高校教員時代からずっと気にかかっている。

そこで、

- 方程式という文字式が図形を表す、ということを理解しているのか
  方程式の解集合 $\{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ が座標平面で図形を示す、と理解しているか？
- 知りたいことがあれば、予想したり、実験したりして、考えることができるか？
- 雰囲気で計算しないで、きっちり定義公式にしたがって遂行できるか？
- 教師が言うこと・書くことをノートに写すことが勉強と思っていないか？

を意識して授業を考えた。

「3 年生の進学希望者が大学進学後に大学の授業で困らない」ことを目的とする夏期講習での授業である。レポートで紹介するのは 2 時間授業 5 コマ中の 3 コマ分の授業である。受講者は、いろいろな関数の微分計算を終えているが、2 次曲線は未学習の生徒である。

楽しく生徒と授業できた（楽しいと思ったのは私だけで、生徒はそう思っていないかもしれない）ことの報告である。本レポートでは、次に記載の“授業の流れ概略”(1)〜(4) までについて、生徒とのやりとりとして表現・再現してみた。(5) 以降にも思い入れのある部分があるが、今回の報告としては割愛した。

0.2　授業の流れ概略

(1) 動機付け：描きたい目的を持った図形の提示

(2)『図形と方程式』の用語的意味の確認：方程式の解をプロットしたものが図形

(3) 2 焦点から楕円上までの距離の和は一定：二重根号の学習

(4) 1 焦点から出た光が楕円上で反射すると他の焦点を通る：
　接線（判別式・微分）の学習
　角度を測る（三角関数の加法定理）の学習

(5) 2 次曲線：事実結果の紹介

(6) 円の面積：極限について注意喚起

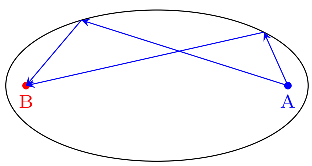
(7) 微分の計算練習（主に合成関数・陰関数）

0.3　実際の授業の流れ

（注意）以下文頭の番号は上記“0.2 授業の流れ概略”に記載の番号とは無関係である

(1) 【 **必勝シューティング or ビリアード** 】＜動機付＞ビーム (or ビリアード球) の動きを動画で見せる

- A：命中率はメチャクチャ悪いが撃つ早さは人一倍早い
- ビーム拳銃で B と決闘する
- 鏡張りの部屋で決闘
- どんな部屋を作成したら良いか・・・



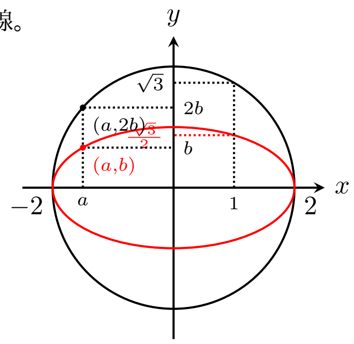
(2) (発問) これはどんな部屋 (曲線) が良いと思うか？

楕円という曲線があるのを知っている生徒がいて“楕円”と答えても、正解とは言わない。

(3) 円 $x^2+y^2=4$ を x 軸方向に半分に縮めた図形がその部屋になることを話し、それを方程式で求める。

【 円を縦方向に半分に圧縮してみる 】

円 : $x^2+y^2=4$ を考える。これを x 軸方向に縮めたのが赤い曲線。



(i)（発問）x 軸の $x=1$ の真上の円上の点の y 座標は何か？

(ii)（確認）くどくても、円の方程式を満たす x, y であること、だから方程式の x に $x=1$ を代入して y 座標が求められることを口頭確認する。

(iii)（確認）その値を半分にした $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が $x=1$ の真上の赤曲線の y 座標であることを話す。

(iv) 赤曲線上の点 (a,b) を考える。

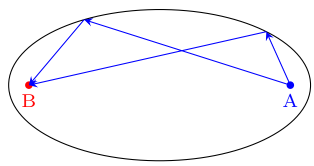
（発問）円上の点の y 座標は何になるか？

（確認）$(a,2b)$ が円上にあるのだから　$a^2+(2b)^2=4$　$\therefore\ a^2+4b^2=4$

赤曲線上の点 (a,b) は $\boldsymbol{x^2+4y^2=4}$ を成り立たせる点。

(v) 赤曲線の方程式 $\longrightarrow$ $x^2+4y^2=4$: これを鏡面とする部屋を作ろう。

(4)（発問）本当に必勝部屋かどうか調べるには何を調べたらいい？



（確認）(i) 何処で反射しても同じ時間（折れ線の和は一定）

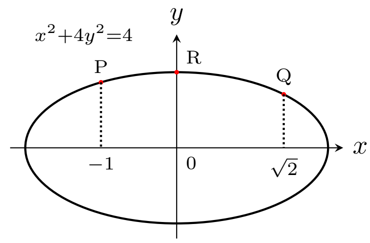
(ii) 必ず相手に当たる（壁で反射したのが必ず B に）

(5) 鏡のどこが最短時間？　ビームの移動距離を測ってみよう

【　鏡上に点を取る　】

（発問）右図の 3 点 $\mathrm{P,Q,R}$ の座標を求めよ。

（確認）x の値に対して、$x^2+4y^2=4$ を正しくする y を求めているということの確認。



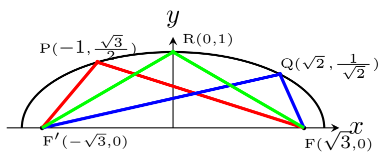
【　3 点 $\mathrm{P,Q,R}$ での長さを計ってみよう　】 $\mathrm{A,B}$ を以降 $\mathrm{F,F'}$ としておく。

(『“相手をやっつける”という良くない表現は止めて、光が届くという方が平和的なので、これまでの A が B をやってつけるというイメージから脱却して』などと理由をこじつけて、将来的に焦点という表示でよく使う $\mathrm{F,F'}$ に変えた）

(発問) 簡単そうな $\mathrm{FR+RF'}$ の距離を測ってみよう。

(生徒計算) $\mathrm{FR+RF'}=2+2=4$

(発問) じゃあ、$\mathrm{FP+PF'}$ の距離は？　計算してみよう。



$$\mathrm{FP+PF'}$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{19+8\sqrt{3}}}{2}+\frac{\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{2}$$

（手が止まり困惑顔）

（質問）二重根号って知ってる？　聞いたこと無い？（生徒）知りません。

（解説）二重根号の言葉の定義、「二重根号をはずす」という言葉の説明をした：

（副産物）＜『二重根号を知らない』というのでしっかり説明できた＞

$$\mathrm{FP+PF'}=\frac{\sqrt{16}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{16}-\sqrt{3}}{2}=\frac{4+\sqrt{3}}{2}+\frac{4-\sqrt{3}}{2}=4$$

（発問）同様に計算してみよう

$$
\begin{aligned}
{\color{blue}\mathrm{FQ}+\mathrm{QF}'} &=\sqrt{\frac{11-4\sqrt{6}}{2}}+\sqrt{\frac{11+4\sqrt{6}}{2}}\\
&=\frac{\sqrt{11-2\sqrt{24}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{11+2\sqrt{24}}}{\sqrt{2}}\ ^{(*1)}\\
&=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\ ^{(*2)}\\
&=4
\end{aligned}
$$

(*1)$\sqrt{\ }$ の前を 2 に形を合わす説明をした
（発問）$\sqrt{5+\sqrt{6}}$ は $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ と等しい値か？
（回答）『二乗したら違う』と言う生徒がいた<嬉>

(*2) （戒）『分母有理化は掟ではない』
『有理化しない方が良いことがある』を話した

3 点 P, Q, R のどこで反射しても同じ時間でビームは F' に到着する。

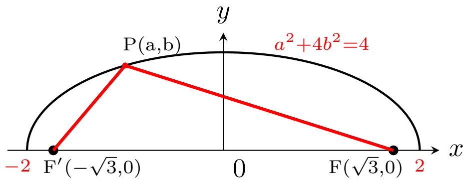
3 点 P, Q, R 以外のどこでも同じ時間で F′ に到着すると期待できそう❗

【　確認調査 やって見よう　】

（発問）鏡上に一般の点 $\mathrm{P}(a,b)$ を取ってみる。鏡上の点なのでどんなことがわかる？

鏡は $x^2+4y^2=4$ だった。

少しして (生徒から）${\color{red}a^2+4b^2=4}$ と返ってきた。



$$
\begin{aligned}
\mathrm{FP} &=\sqrt{(a-\sqrt{3})^2+b^2}\\
&=\sqrt{(a-\sqrt{3})^2+\frac{4-a^2}{4}}\\
&=\frac{\sqrt{3a^2-8\sqrt{3}a+16}}{2}
\end{aligned}
$$

（この段階で、一人の生徒が『あっ』と声を出した。どうした？　と聞いてみると、
『因数分解』と言った。
私：「ほんまやなあ、因数分解でけるなあ、気つかへんかった」
と反応した。私が用意していたのは、

$$\sqrt{3a^2-8\sqrt{3}a+16}=\sqrt{3a^2+16-2\sqrt{3a^2\times 16}}=\sqrt{3}a-\sqrt{16}=\sqrt{3}a-4$$

の二重根号外しだった。生徒の気づきの方が素直なので、二重根号外しには言及せず、生徒の気づきの方向で話を進めることにした。
二重根号外しの方法でも可能：“結局二重根号外しは $(A+B)^2=A^2+b^2+2AB$ の恒等式なんや”、ということを、後々のどこかで話しておいてやっても面白かったかもしれない）

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}a-4)^2}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{3}a-4}{2}
\end{aligned}
$$
（わざと間違えて板書した）

同様に計算して、

$$\mathrm{FP}'=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}a+4)^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}a+4}{2}\quad ,\quad \mathrm{FP}+\mathrm{FP}'=\frac{\sqrt{3}a-4}{2}+\frac{\sqrt{3}a+4}{2}=\sqrt{3}a$$

（語りかけ）「あれえ。4 にならへんなあ？」「4 やろと期待したんやけどなあ」

少し沈黙の時間。

（私）「さっき P, Q, R で計算したとき、4 やった。文字になったらなんであかんことになったんやろ。
$\sqrt{3}a$ が 4 になるのん、$a=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ のときしか無いことになる・・・」

また少しの時間沈黙

（生徒）『ルートの値は正の数だった。それと関係ある？』

（私）「そうかあ、確かに a が負の数やったら、$\sqrt{3}a$ 負の数で、長さが負の数いうの変やなあ。$\sqrt{\ }$ 外したんでいうと、$\mathrm{PF}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}a-4)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}a-4}{2}$ これ $a<0$ やったら、負の数で変やなあ。とすると、これはどうなるんやあ。」

（生徒から）『マイナスつければいいんでした』<嬉>

$$\mathrm{FP}+\mathrm{FP}'=\frac{-\left(\sqrt{3}a-4\right)}{2}+\frac{\sqrt{3}a+4}{2}=4$$

（発問）これで、ちゃんと 4 が出てきた❗

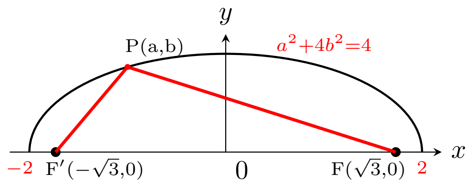
そやけど、$-\left(\sqrt{3}a-4\right)=4-\sqrt{3}a$ はほんまに正の数か？

負になったりすることないか？ a が大きな値やったら負になってまうでえ。

a がどんな値やったら正の数なんやろ？　調べてみよう！

生徒はどうしたらよいのか不明の様子

（確認）点 (a,b) は円を半分に縮めた図やったなあ。a はこの点 P の x 座標なんやった。ほんなら、a は大きな値になり得るやろか。



（生徒）『2 より大きくならない』

（私）「そやなあ、2 以下やなあ。ほんなら、$4-\sqrt{3}a$ は負になるやろか。」

（生徒）『絶対、正の数。』

（発問）「なんで？」

（生徒）『一番小さくても $4-2\sqrt{3}$ でこれは正の数だから』

（私）「そうやなあ、でけたなあ」：この後、$4-\sqrt{3}a>0$ の解を求めて、$4-\sqrt{3}a>0$ であることを確信することも可能なことを生徒に話し、不等式を解いて実際に調べた。更に、$\sqrt{3}a+4$ についても、a が負の数で小さければ負になる可能性があることを確認し、生徒に $\sqrt{3}a+4>0$ であることを確認させた。これらの部分のやりとりは割愛する。

（私）「確かに。そしたら、a が何であっても $\mathrm{FP}+\mathrm{PF}'=4$ ということなんや！」

「a がなんであってもということは、P がこの図のどこであってもということ」

「ビームは何処で反射しても同じ時間で F′ に来る、ということがわかったねえ。」

（発問）これで F から出たビームは本当に同じ時間で F′ に到達する？

少し沈黙

（生徒）『ひょっとして、必ず当たるか？　ということ・・・』

（私）「そうや、その通りや。」

(4) で見せたスライド（点線の右）を見せ再確認した。

(i) 何処で反射しても同じ時間（折れ線の和は一定）

(ii) 必ず相手に当たる（壁で反射したのが必ず B に）

(6) 反射して F′ に当たる？

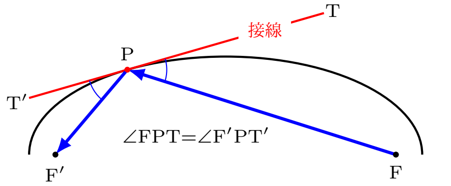
【　曲がった鏡で反射って？　】

< 光の反射：入射角＝反射角 >

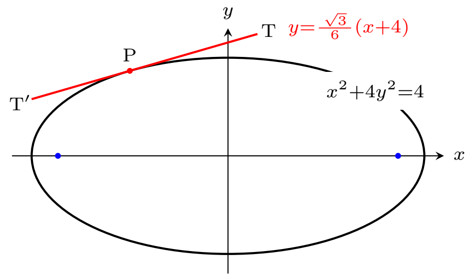
曲線に光が当たるとどのように反射するか？

当たった場所（P）での接線が鏡のように思って反射する。

この鏡の接線について調べよう。



【　接線 T T′　】



（発問）直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+4)$ は $\mathrm{P}(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$ で鏡に接している。

本当に接しているかどうか調べてみよう。

直線が接線かどうか調べたければ、何を調べたらいい？

（ヒント話 1）直線と右のような曲線が出会う（交点）について昔何かしたことない？

（ヒント話 2）直線と放物線、2 次関数で 1 年生の頃やったことあったでえ。

（生徒）判別式？

(私)そうや、あったなあそんなん。それ、交点（共有点）が一個のときだけが接線いうことやった。

- 交わっている（共有点：2 個）
- 接している（共有点：1 個）
- 出会わない (共有点：0 個）

交点（共有点）ということは、直線上にも放物線上にもどちらの曲線の上にもある点のことやなあ。どちらの上にもあるということは、直線の式も正しくするし、放物線の式も正しくするいうことや。ほんなら、それ連立方程式の解ということちゃうか。
鏡の部屋で言うたら、鏡の方程式 $x^2+4y^2=4$ と接線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+4)$ の共有点は 1 個、つまり連立方程式の解が 1 組だけということやなあ。

(発問)連立方程式を解いてみよ。

$x^2+4y^2=4$ に $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+4)$ を代入してみよう。

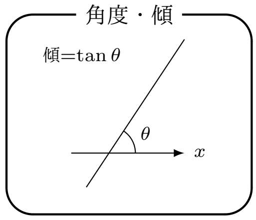
(生徒作業)

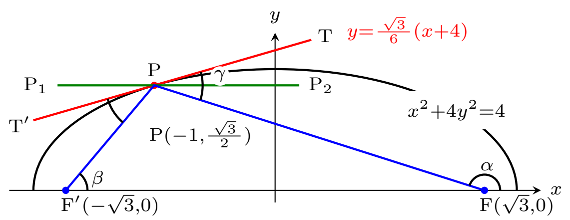
$$x^2+4\left\{\frac{\sqrt{3}}{6}(x+4)\right\}^2=4 \qquad \therefore\quad x^2+2x+1=0 \qquad \therefore\ x=-1\,(\text{重解})$$

共有点が 1 個なので、確かに接している

【 入射角＝反射角 の確認 】

P で反射して F′ に到達することを確認するには、
∠FPT と ＝ ∠F′PT′ が等しいかどうかを調べればよい。
直線と直線の角度を調べることになる。
『直線と角度』で思い出されるのは、『傾きと tan』の関係。





$$\tan\alpha=-\frac{3-\sqrt{3}}{4}\quad,\quad \tan\beta=\frac{3+\sqrt{3}}{4}\quad,\quad \tan\gamma=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\tan\angle FPP_2=\tan\angle F'FP=\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

$$\tan\angle FPT=\tan(\gamma+\angle FPP_2)=\frac{\tan\gamma+\tan\angle FPP_2}{1-\tan\gamma\cdot\tan\angle FPP_2}$$

$$\tan\angle F'PT'=\tan(\angle F'PP_1-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\cdot\tan\gamma}$$

$$\tan\angle FPT = \frac{\tan\gamma + \tan\angle FPP_2}{1-\tan\gamma\tan\angle FPP_2} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\cdot\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}} = \frac{18-2\sqrt{3}}{27-3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

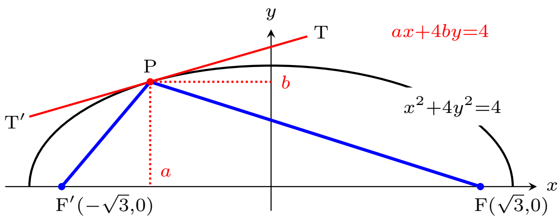
$$\tan\angle F'PT' = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1+\tan\beta\cdot\tan\gamma} = \frac{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}}{1+\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{18+2\sqrt{3}}{27+3\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

$$\tan\angle FPT = \tan\angle FPT \quad \therefore \quad \angle \mathrm{FPT} = \angle \mathrm{F'PT'}$$

F から出た光が $\mathrm{P}(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ で反射すると、確かに F′ を通る。

<入射角＝反射角 の確認>鏡の何処でもそうなる？

【 接線 TT′ 】



鏡上一般の点 P での接線

直線 $ax+4by=4$ は $\mathrm{P}(a,b)$ で鏡に接している。

本当に接しているかどうか調べてみよう。

鏡の方程式は $x^2+4y^2=4$。連立方程式は

$$\begin{cases} ax+4by=4 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$$

上の式から $y=-\dfrac{a}{4b}x+\dfrac{1}{b}$ を下の式に代入

$$x^2+4\left(-\frac{a}{4b}x+\frac{1}{b}\right)^2=4$$

$$\frac{a^2+4b^2}{4b^2}x^2-\frac{8a}{4b^2}x+\frac{4-4b^2}{b^2}=0$$

$$(a^2+4b^2)x^2-8ax+16(1-b^2)=0$$

（何か気づくことないか話しかけると

(a,b) は鏡上なので、$a^2+4b^2=4$ より $a^2+4b^2=4, 4(1-b^2)=a^2$　と答え

次の式を示してくれた。）

$$4x^2-8ax+4a^2=0$$

$$4(x-a)^2=0 \quad x=a \text{（重解）}$$

確かに接している。

【 何処でも 入射角＝反射角 ？ 】

点 $\mathrm{P(a,b)}$ で光が反射したら F' を通るか?

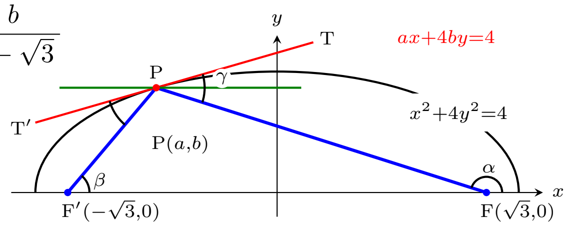
確認してみよう。

$$\tan\alpha=\frac{b}{a-\sqrt{3}} \quad , \quad \tan\beta=\frac{b}{a+\sqrt{3}} \quad , \quad \tan\gamma=-\frac{a}{4b}$$

$$\tan\angle FPP_2=\tan\angle F'FP=\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha=-\frac{b}{a-\sqrt{3}}$$

$$\tan\angle FPT=\tan(\gamma+\angle FPP_2)=\frac{\tan\gamma+\tan\angle FPP_2}{1-\tan\gamma\cdot\tan\angle FPP_2}$$

$$\tan\angle F'PT'=\tan(\angle F'PP_1-\gamma)=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\cdot\tan\gamma}$$



$$\begin{aligned}&\tan\angle FPT\\=&\frac{\tan\gamma+\tan\angle FPP_2}{1-\tan\gamma\tan\angle FPP_2}\\=&\frac{-\dfrac{a}{4b}-\dfrac{b}{a-\sqrt{3}}}{1-\dfrac{a}{4b}\cdot\dfrac{b}{a-\sqrt{3}}}\\=&\frac{\sqrt{3}a-(a^2+4b^2)}{3ab-4\sqrt{3}b}^{(*3)}\\=&\frac{\sqrt{3}a-4}{(3a-4\sqrt{3})b}^{(*4)}\\=&\frac{1}{\sqrt{3}b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\tan\angle F'PT'\\=&\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\cdot\tan\gamma}\\=&\frac{\dfrac{b}{a+\sqrt{3}}+\dfrac{a}{4b}}{1-\dfrac{b}{a+\sqrt{3}}\cdot\dfrac{a}{4b}}\\=&\frac{\sqrt{3}a+(a^2+4b^2)}{3ab+4\sqrt{3}b}^{(*3)}\\=&\frac{\sqrt{3}a+4}{(3a+4\sqrt{3})b}^{(*4)}\\=&\frac{1}{\sqrt{3}b}\end{aligned}$$

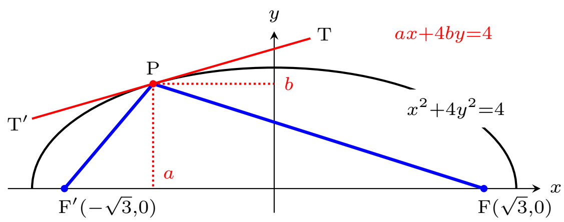
(*3) で「今までよく見たの出てきたなあ」と言うと、生徒はすぐに (*4) に気づいてくれた<嬉>

$$\tan\angle FPT=\tan\angle FPT \quad \therefore \quad \angle\mathrm{FPT}=\angle\mathrm{F'PT'}$$

F から出た光が $\mathrm{P}(a,b)$ で反射すると、確かに F′ を通る。

【 自分で接線出したい 】

- 点 (a,b) での接線が $ax+4by=4$ だと教えられて、確認した。
- 教えてもらわなくても自分で出したい！。
- 接線は直線
- 直線は 2 つのものがわかれば方程式が書ける。
  今の接線の問題で状況を考えてみると次の表になる。
  （今わかっている情報を赤字、わかっていない情報を青字で表した）



2 つのもの	方程式	今の状況	解くときの気持ち
傾き：p と y 切片：q	$y=px+q$	2 つも不明	使いたくない
1 点：(a,b) と傾き：p	$y=p(x-a)+b$	傾き 1 つだけ不明	使ってもいいかな
2 点：(a,b) , (c,d)	$y=\frac{d-b}{c-a}(x-a)+b$	1 点だけ不明	使ってもいいかな

- 一文字 p だけ求めれば良い、という 1 点：(a,b) と傾き：p が一番楽だろう！
  これでやってみよう。次のようになる。

【 $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ での接線が $y=\frac{\sqrt{3}}{6}(x+4)$ とは知らずに求めよう 】

接線の傾きを p とする。接線は点 $\left(-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通るので $y=p(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}$ と表せる。
$x^2+4y^2=4$ に代入。

$$x^2+4\left\{p(x+1)+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}^2=4$$

$$x^2+4\left\{px+\left(p+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2=4 \longleftarrow（x \text{ の方程式。この形の方が後々計算し易い}）$$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= x^2 + 4\left\{px + \left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^2 \\
&= x^2 + 4\left\{p^2x^2 + 2p\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x + \left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\} \\
&= \left(4p^2 + 1\right)x^2 + 8p\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x + 4\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \left(4p^2 + 1\right)x^2 + 8p\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x + 4\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4 = 0$$

$$
\begin{aligned}
D/4 &= 16p^2\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(4p^2 + 1\right)\left\{4\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\right\} \\
&= \left\{16p^2 - 4(4p^2 + 1)\right\}\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4(4p^2 + 1) \\
&= -4\left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4(4p^2 + 1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore 4p^2 + 1 - \left(p + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$3p^2 - \sqrt{3}p + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\sqrt{3}p - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\therefore p = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

因数分解に気づかなければ、
解の公式で次のようにして勿論 OK

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{4}}}{6} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}
\end{aligned}
$$

接線は

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\sqrt{3}}{6}(x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6}(x + 4)
\end{aligned}
$$

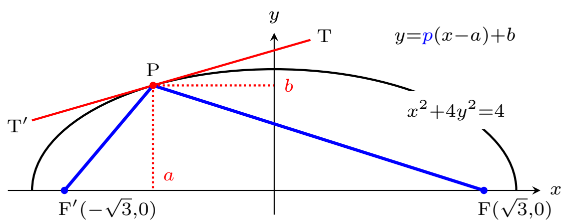
【 自分で接線出したい 】

$\mathrm{P}\left(-1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ と特定の点だけではなく、一般の点 $\mathrm{P}(a, b)$ の場合の接線も自分で出してみよう。

$$x^2 + 4\left\{p(x - a) + b\right\}^2 = 4$$

$$x^2 + 4\left\{px + (b - ap)\right\}^2 = 4$$

$$(4p^2 + 1)x^2 + 8p(b - ap)x + 4(b - ap)^2 - 4 = 0$$



$$
\begin{aligned}
D/4 &= 16p^2(b - ap)^2 - (4p^2 + 1)\left\{4(b - ap)^2 - 4\right\} \\
&= -4(b - ap)^2 + 16p^2 + 4 \\
&= 4(4 - a^2)p^2 + 8abp + 4 - 4b^2 \\
&= 16b^2p^2 + 8abp + a^2 \quad \left(\because\ a^2 + 4b^2 = 4\right) \\
&= (4bp + a)^2\ (= 0) \quad \therefore\ 4bp + a = 0\ \ \therefore\ p = -\frac{a}{4b}
\end{aligned}
$$

接線：$y = -\dfrac{a}{4b}(x - a) + b \to ax + 4by = a^2 + 4b^2$

接線 といえば 微分でしょ !!

$$x^2 + 4y^2 = 4 \longrightarrow y^2 = \frac{4 - x^2}{4} \longrightarrow y = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\ \left(= \frac{(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2}(4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - x^2)'}{2} = -\frac{x}{2\sqrt{4 - x^2}}$$

接線の傾き：$-\dfrac{a}{2\sqrt{4 - a^2}} = -\dfrac{a}{2\sqrt{4b^2}} = -\dfrac{a}{4b}$

次のような微分の方法がある。

$$x^2+4y^2=4 \longrightarrow y^2=\frac{4-x^2}{4} \longrightarrow y=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\ \bigl(=f(x)\text{とおく}\bigr)$$

$$x^2+4\{f(x)\}^2=4 \quad \text{（両辺を微分）}$$

$$2x+4\cdot 2f(x)\cdot f'(x)=0 \qquad 4f(x)\cdot f'(x)=-x$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{x}{4f(x)}=-\frac{x}{4y}$$

y を $f(x)$ に置き換えずに次のようにやるともの凄く短く、簡単になる。

$$2x+4\cdot 2y\cdot y'=0 \qquad 4yy'=-x \quad \therefore\ y'=-\frac{x}{4y}$$

教科書では、y' のことを $\dfrac{dy}{dx}$ と書いてあることが多い。この記号を使うと、今示した計算は

$$2x+4\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}=0 \qquad 4y\frac{dy}{dx}=-x \quad \therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$$

と書いていくことになる。勿論、接線の傾き：$-\dfrac{a}{4b}$　。