令和３年６月５日（土）

角の三等分器

深い学び

第117回数学教育実践研究会

数実研会員　　安田 富久一

0.1　角の三等分

『任意の角を定規とコンパスで（ユークリッド的に）三等分作図は不可能』

【命 題 ：アルキメデス】

$\angle\mathbf{AOB}$ が与えられている。

$\mathbf{O}$ を中心とし半径 $\mathbf{OA}$ の半円を描く。

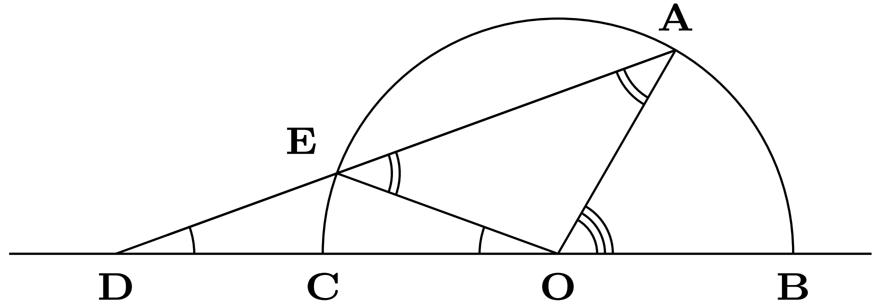
半円の直径 $\mathbf{BC}$ の延長線上に点 $\mathbf{D}$ を、

$\mathbf{AD}$ と半円との交点 $\boldsymbol{E}$ が $\mathbf{DE}=\mathbf{OE}$ と

なるようにとる。このとき、

$$\angle\mathbf{ODE}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\angle\mathbf{AOB}$$

である。



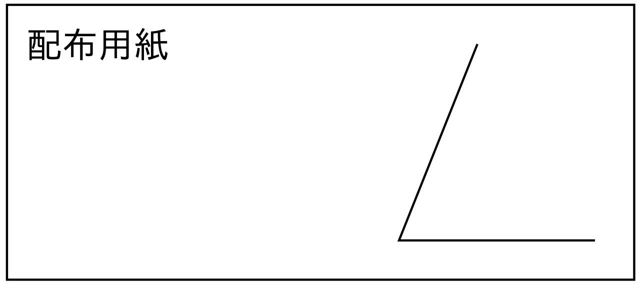
0.2　角の三等分を教材に

角の三等分の教材例

(1) 事前に「ギリシャの三大作図問題」について調べさせる。

(2) アルキメデスの角の三等分の命題を提示し、証明を考えさせる。
(発表させるのもよい)。

(3) 実際に角を描いた紙を配布し（例：右図)、
アルキメデスの角の三等分の命題を元に、定規と
コンパスで角の三等分の作図 （上記枠内の図の
D を求める）方法を考えさせ、実際に作図させる。



(4) 作図器具として、定規・コンパス以外を使ってもよいとして、
どんな器具を作ると便利か考えさせる。

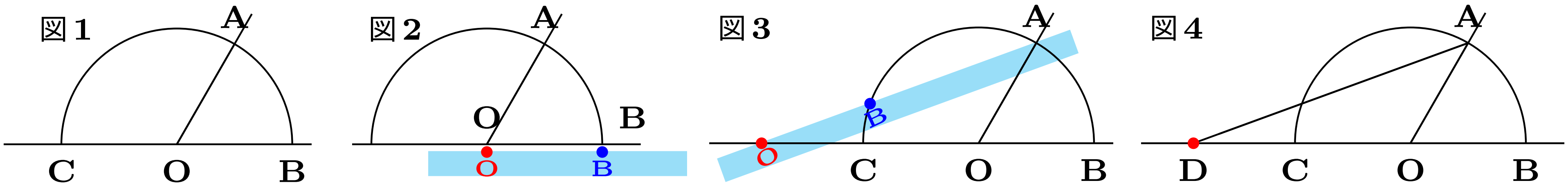
(5) 実際に作図すると誤差が出る。
三等分角の近似角で良いのではないかを問いかける。

0.3　授業の流れと生徒の意識の流れ

(1) 事前に「ギリシャの三大作図問題」について調べさせる。
ギリシャの三大作図問題：円積問題、立方体倍積問題、角の三等分問題：作図不可能。
生徒の意識に角の三等分作図は不可能という感覚が残る。

(2) アルキメデスの角の三等分の命題を提示し、証明を考えさせる。
三等分角がアルキメデスの図に現れていることに気づくことを期待。

(3) アルキメデスの角の三等分の命題を元に、
定規とコンパスで角の三等分の作図方法を考えさせ、実際に作図させる。
三等分角がアルキメデスの図に現れていることを全員に知らせ、
定規とコンパスで描く方法を考えさせ、その作図法



を周知し、全員に配布用紙の角を定規とコンパスで三等分させる。
生徒に、半径が必要という意識が植え付けられるのを期待。
生徒は、人それぞれ半径が違っても大丈夫なことを知る。

0.3　授業の流れと生徒の意識の流れ

(4) 作図器具として、定規・コンパス以外を使ってもよいとして、どんな器具を作ると便利か考えさせる。

(3) の段階でアルキメデスの図で角の三等分の証明に必要な情報のエッセンスが参考図であることを感じてくれていることを期待したい。

「命題の図で不要な線を消し、必要な線のみを残せ」という設問を設けるのも授業作りの作戦とする。
参考図はその解答案である。

図 5 は角の三等分器の一例である。

参考図

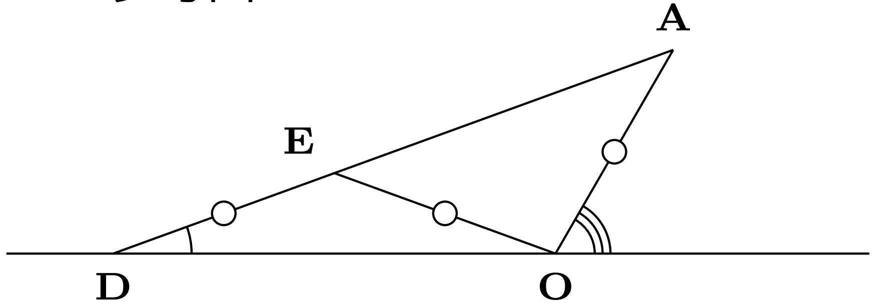
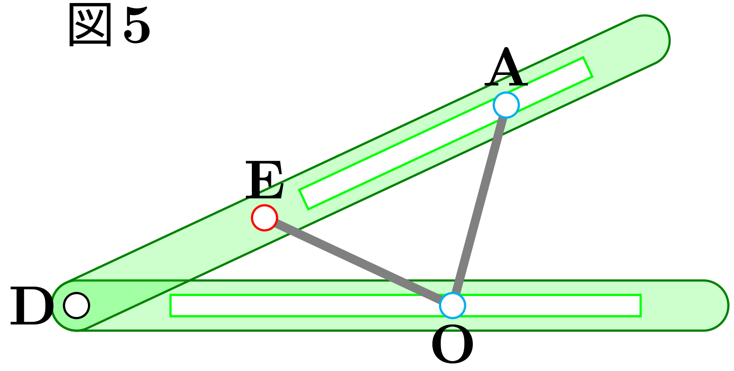


図5



(5) 実際に作図すると誤差が出る。
三等分角の近似角で良いのではないかを問いかける。

　確実に正確な三等分角を実際に描けるか？　　誤差がほぼ確実に出る。『どうせ近似的な三等分角なら近似値三等分角でええやないか！』（実用という、数学を日常生活や社会生活の事象に役立たせる一つの視点として、大切な感覚を与える教材に）。

$$\angle\mathbf{AOD_1} = \frac{1}{4}\angle\mathbf{AOB}$$

$$\angle\mathbf{D_1OD_2} = \frac{1}{4}\angle\mathbf{AOD_1} = \left(\frac{1}{4}\right)^2\angle\mathbf{AOB}$$

$$\angle\mathbf{D_2OD_3} = \frac{1}{4}\angle\mathbf{D_1OD_2} = \left(\frac{1}{4}\right)^3\angle\mathbf{AOB}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdot$$

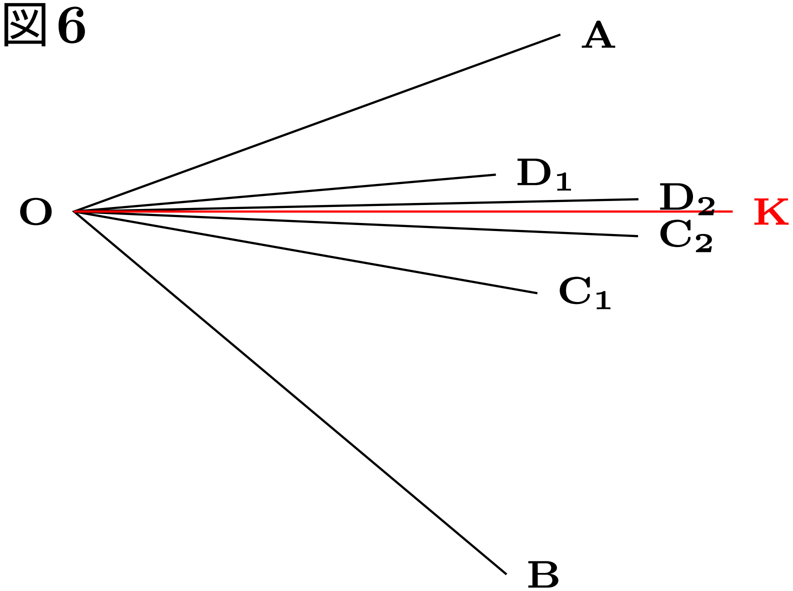
$$\therefore\quad \angle\mathbf{AOK}$$

$$= \angle\mathbf{AOD_1} + \angle\mathbf{D_1OD_2} + \angle\mathbf{D_2OD_3} + \cdots$$

$$= \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right\}\angle\mathbf{AOB}$$

$$= \frac{1}{3}\angle\mathbf{AOB}$$

図6



0.4　余談：こんな三等分器もある

(1) 図 1を描いたガラス板を用意する。

赤点：半円の中心と赤点の中点に垂直線をたててある

(2) 図 2の角 $\angle \mathbf{MPN}$ を三等分したい。

(3) 図 3のようにガラス板を置く $\longrightarrow$ 三等分の説明図：三等分されている。

図 1

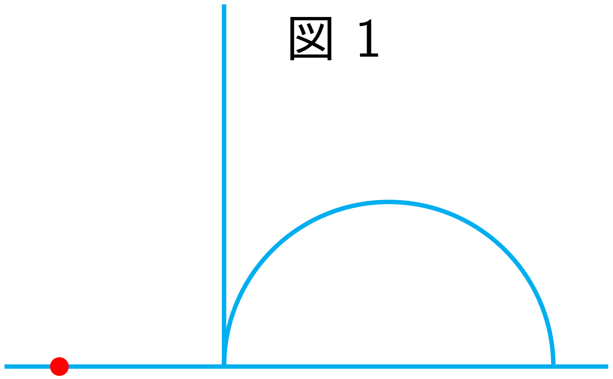


図 2

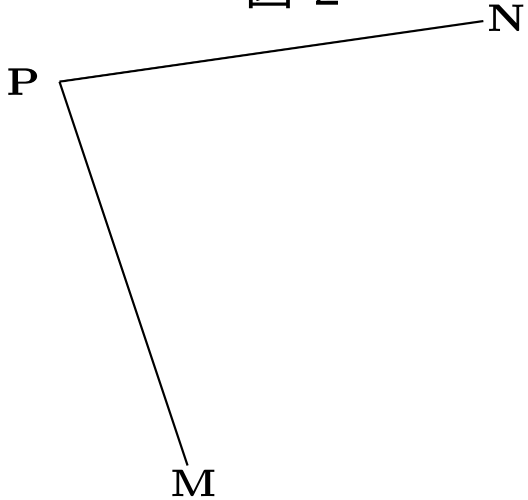
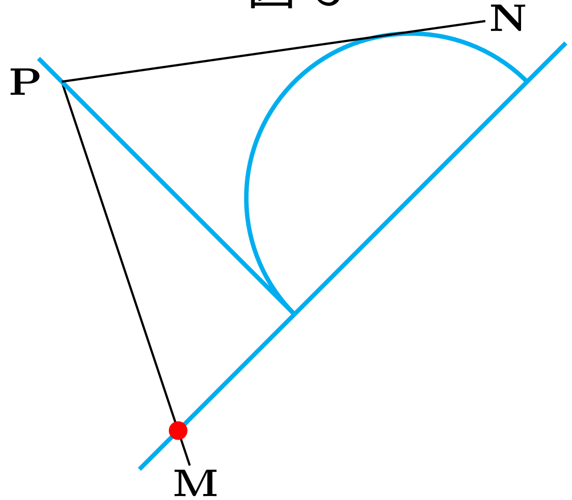
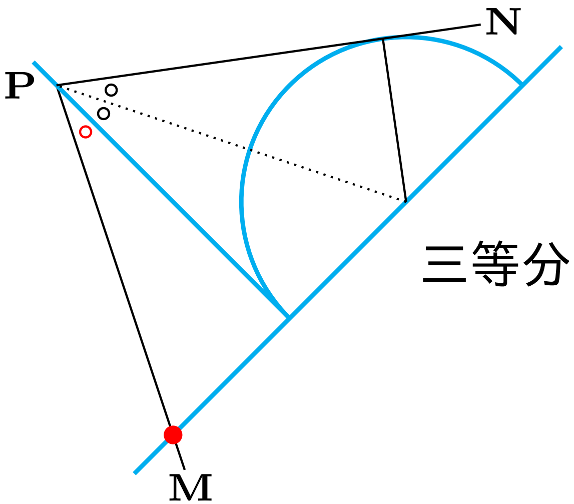


図 3





三等分の説明図

0.5　教材のネライ　深い学びの育成を期待

今回の教材のネライとしては、次のようなものになる。

(1) 数学史的な興味関心の喚起。

(2) 幾何の証明の技術の練習。

(3) 実際に作業をすることでの視点を生み出す。

(4) 意識を解放する訓練：不要な情報とキーポイント情報を見分ける能力育成する。
便利な三等分器を作ることで理論と実用の意識の育成する。

(5) 正確でなくても良い実用の意識の養成。