第117回数学教育実践研究会

角の三等分器－深い学び

レポート

令和3年6月5日(土)
Zoom会議

数実研会員　安田富久一

1　角の三等分

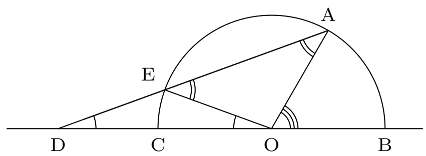
『任意の角を上記とコンパスで（ユークリッド的）作図することはできない』。これは、ギリシアの 3 大作図問題の一つとして有名な命題である（我々になじみ深い 60° の角の三等分ですら作図できない）。しかし、ユークリッド的でなくても良ければ作図可能になる。しかも、ユークリッド時代よりも前のアルキメデスが発見している。アルキメデスが発見したのは次の命題である。

【 命 題 】

∠AOB が与えられているとする。O を中心とし半径 OA の半円を描く。半円の直径 BC の延長線上に点 D を、AD と半円との交点 E が DE = OE となるようにとる。このとき、

$$\angle \mathrm{ODE} = \frac{1}{3}\angle \mathrm{AOB}$$

である。



証明はいたって簡単で、

（証明）

$$\begin{aligned}\angle AOB =& \angle OAD + \angle ODE \quad (\because\ \triangle OAD\text{の内角の和と外対角})\\ =& \angle OEA + \angle ODE \quad (\because\ OA = OE)\\ =& \angle ODE + \angle DOE + \angle ODE \quad (\because\ \triangle EOD\text{の内角の和と外対角})\\ =& 3\angle ODE \quad (\because\ EO = ED)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \angle ODE = \frac{1}{3}\angle AOB$$

2　角の三等分を教材に

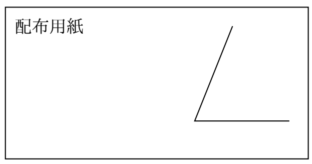
上記角の三等分を発展的な課題解決教材に出来ないか考えてみた。

角の三等分の教材例

(1) 事前に「ギリシャの三大作図問題」について調べさせ、そのうちの一つに上記の角の三等分作図が不可能であるという事実を確認させる。

(2) 上記アルキメデスの角の三等分の命題を提示し、その証明を考えさせる（誰かに発表させてもよい）。

(3) 実際に角を描いた紙を配布し（例えば右図のような紙）、アルキメデスの角の三等分の命題を元に、定規とコンパスで角の三等分の作図（上記枠内の図の D を求める）方法を考えさせ、実際に作図させる。



(4) 作図器具として、定規・コンパス以外を使ってよい（もっと言えば、定規・コンパスを使わなくてもよい）としたら、どんな器具を作ると便利か考えさせる。

(5) 無限回の作図操作で三等分角の近似角が得られることを示し、正確な値でなくても実際には問題がない：実用性について考えさせる。

上記教材のネライは後で述べることにして、まず (1)～(5) の解答例を示す。

3　解答例

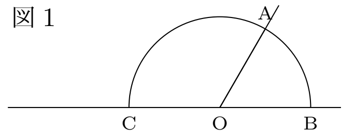
(1) **円積問題**　与えられた円と同じ面積を持つ正方形を作図する。
　立方体倍積問題　与えられた立方体の体積の二倍の体積を持つ立方体を作図する。
　角の三等分問題　与えられた角を三等分の角を作図する。

(2) 既に【命題】の枠の後で示したので省略。

(3) 次のように作図すればよい。

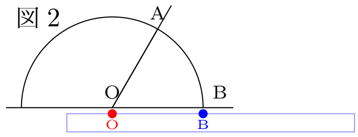
(i)　角の頂点を O とする。角を作っている片方の辺を定規で延長しておき、O を中心とする半円（半径は適当でよい）をコンパスで描く（右図 1）。そして、半円と線分の交点を右図 1 のように A , B , C とする。

図 1



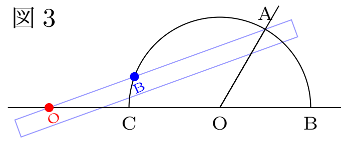
(ii)　定規を OB に当て、定規に O と B の 2 点の場所と同じ長さの目印を記す（右図 2）。

図 2



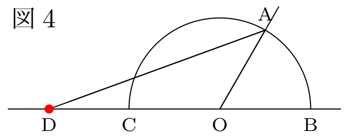
(iii)　定規に記した B を半円上に保ちながら、定規を滑らせて目印 O が BC の延長上にあり、さらに定規の縁が点 A 上に来るようにする（右図 3）。

図 3



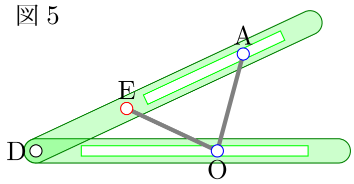
(iv)　この状態で定規に沿って線分を描く。BC の延長上の定規の目印 O の点を D とする（右図 4）と、∠ADO が求める 3 等分角になっている。

図 4



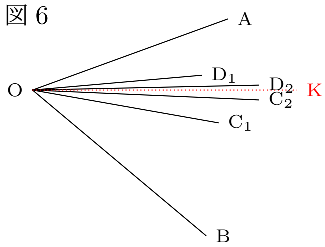
(4)　（右図 5 参照）厚紙で二枚の緑の板を作り、白い部分はカッターで開ける。O , A , D , E の所は鳩目で下が見えるようなもので止める。但し、D は 2 枚の板を通して止め、O , A はカッターで開けた部分（白い部分）を鳩目がスムースに移動可能な状況にして止める。

図 5



(5)　（右図 6 参照）角 ∠AOB が与えられているとする。∠AOB の 2 等分線 OC_1 を引き、$\angle AOC_1$ の 2 等分線 OD_1 を引く。次に、$\angle C_1OD_1$ の 2 等分線 OC_2 を引き、$\angle C_2OD_1$ の 2 等分線 OD_2 を引く。この操作を（無限に）ずっと続けていく。すると、$OC_1 , OC_2 , \cdots$ は反時計回りに、$OD_1 , OD_2 , \cdots$ は時計回りに、次第にお互いにある半直線 OK に近づいていく。

図 6



確認してみよう

$$\angle AOD_1 = \frac{1}{4}\angle AOB$$

$$\angle D_1OD_2 = \frac{1}{4}\angle AOD_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \angle AOB$$

$$\angle D_2OD_3 = \frac{1}{4}\angle D_1OD_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \angle AOB$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \angle AOK &= \angle AOD_1 + \angle D_1OD_2 + \angle D_2OD_3 + \cdots \\ &= \left\{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots\right\}\angle AOB \\ &= \frac{1}{3}\angle AOB\end{aligned}$$

4　教材のネライ　深い学びの育成を期待

(1) 数学史的なお話に触れることで興味を持たせる。それを自分または仲間と調べることで、生徒により深い興味を与える。

(2) 角の三等分のアルキメデスの図を【命題】の枠のように生徒に与えておくことは、この後の (3),(4) でのネライに関係してくる。

(3) 実際にアルキメデスの図を描かせることで、“コンパスの半径の長さは大きな意味を持たない”ということを意識しないまでも、何か感じ取ってくれることを期待したい。

(4) 半円ということから意識が自由になっていないと上記解答の器具が作れることに気づかない。アルキメデスの図において、半円であることは大切な情報ではないことに気づくことが求められる。目の前にある情報の中から不要な情報と役立つ情報とを見分ける能力、をこの教材で養えないか、というのが一番のネライである。そして、(1)〜(3) がこのネライ達成のためによく働くのための伏線としてのサプリメント教材である。

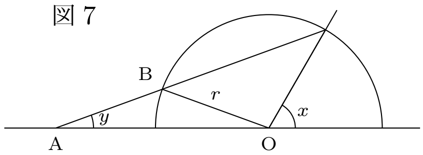
(5) 実際に三等分角を作図する場合、確実に正確な三等分角を描くことは望めない（誤差が出る)。『どうせ近似的な三等分角を描くことになるなら、近似値三等分角で実用上十分ではないか！』ということを教える教材として使える（実用性という、数学を日常生活や社会生活の事象に役立たせる場合の一つの視点として、大切な感覚を与える教材ではないだろうか)。

5　参考にした本と補足

右図 7 は参考文献 [1]「数学とは何か」の“第Ⅲ章：作図法数体の代数 §3 三つのギリシャの問題の回の不能性”に描かれているアルキメデスの図である。

[1] には図に添えて次の説明がある。

図 7



＜[1] に書かれている説明＞

任意の角 x が与えられたとする。その内の基線を左に延長し、O を中心として任意の半径 r の半円を描け。定木の縁に 2 点 A および B を $\mathrm{AB} = r$ となるようにしるせ。点 B を半円上に保ちながら、定木を滑らせて A が角 x の基線の延長上にあり、定木の縁は角 x の端辺と O を中心とする半円との交点上にくるようにせよ。定木をこの位置に置いたままで直線を引き、それともとの角 x の基線の延長とのなす角を y とせよ。

演習問題：この作図により実際に $y = x/3$ が作られることを示せ。

これだと“半径の大きさは大切な情報ではないということを気づく練習”の味を消してしまいそうな気がしていた。そこで、参考文献 [2] に書かれている絵を参考にしたのが、3 解答例 (4) で示した 図 5 である。また、[2] の当該箇所には p.1【命題】の枠に描いたアルキメデスの図と同内容の図があったので、教材としての味を増す参考にした。

【 参考文献 】

[1]「数学とは何か」
R. クーラント/H. ロビンズ（共著）森口繁一（監訳）岩波書店 1967.5.20
原著名：「What Is Mathematics」Courant and Robbins / OXFORD

[2]「未知中の既知－方程式物語」
張遠南（著）上海科学普及出版社発刊：数学故事叢書 6 巻中の第 2 巻目
原著名：「未知中的已知－方程的故事」