第 116 回数学教育実践研究会

隣接 3 項間の漸化式
（名は体を表す）

レポート

令和 3 年 1 月 30 日 (土)
Zoom 会議

数実研会員　安田富久一

1　名は体を表す

諺『名は体を表す』: 名はそのものの実体を表している。名と実は相応ずる。

1.1　隣接 3 項間の漸化式

この諺を痛感した事があった。隣接 3 項間の漸化式の一般項だった。非常に危険な状況に遭遇した（大げさ？！）ということを伝えたい。それに関わる間違い探し問題を作成してみた。

1.2　間違い探し問題

間違い探し問題

【 問題 】　次の記述は正しくない。どこが駄目か指摘せよ。

r, s を実数の定数とする x の 2 次方程式 : $x^2 + rx + s = 0$ の 2 つの解を α, β とし、$\alpha \neq \beta$ とする。このとき次の漸化式 :

$$\begin{cases} a_{n+2} + ra_{n+1} + sa_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ a_1 = p\ ,\ a_2 = q \end{cases}$$

の一般項を求める。

解と係数の関係より、$\alpha + \beta = -r$, $\alpha\beta = s$ なので、

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta)\, a_{n+1} + \alpha\beta\, a_n = 0$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+2} - \alpha\, a_{n+1} = \beta\, (a_{n+1} - \alpha\, a_n) \\ a_{n+2} - \beta\, a_{n+1} = \alpha\, (a_{n+1} - \beta\, a_n) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a_{n+1} - \alpha\, a_n = (q - \alpha\, p)\, \beta^{n-1} \\ a_{n+1} - \beta\, a_n = (q - \beta p)\, \alpha^{n-1} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{1}$$

(1) の下の式を上の式で引き、両辺を $\alpha - \beta\ (\neq 0)$ で割り、一般項が

$$a_n = \frac{(q - \beta p)\, \alpha^{n-1} - (q - \alpha\, p)\, \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

と得られる。

1.3　間違いの所在

まず、一般項が駄目なことからこの記述が駄目なことが判る。駄目を理解するために、例として $r = -2, s = 0$ のときを考える。漸化式は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \\ a_1 = p\ ,\ a_2 = q \end{cases}$$

である。$a_{n+2} = 2a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ なので、一般項は

$$a_n = \begin{cases} q \cdot 2^{n-2} & (n = 2, 3, \cdots) \\ p & (n = 1) \end{cases} \tag{2}$$

となる。一般項は (2) のように場合分けをしたスタイルになるはずなので、駄目なことが判る。間違いはこれ以前にあるはず。

(1) 式の段階で既に駄目というのを同じ例で見よう。2 次方程式の解は $\alpha=2, \beta=0$ であり、(1) の上の方の式に代入して具体的に書くと、

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=(q-2p)\cdot 0^{n-1} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

となる。この右辺を単純に 0 とはできない。というのは、$n=1$ のとき 0^{n-1} は 0^0 になり、高校数学では 0^0 は考えないことになっていた（はず）。つまり、2 次方程式が 0 を解に持つときと持たないときに場合を分けて (1) を書かないといけないので、間違い発見。

(1) 式よりも前に間違いは無い（と思う）ので、“間違いは (1) 式”である。

【注】

(2) を場合分けしないで書く方法はある。

数列 $\{\ell_n\}$ を $\ell_1=1, \ell_n=0\,(n=2,3,\cdots)$ と定義し、

$$a_n=p\cdot\ell_n+q\cdot 2^{n-2}(1-\ell_n)$$

とすれば場合分けしないですむ。

勝手にこんな数列作って気持ちがよくない、という場合には、学習指導要領外だが、線形代数等でよく使われるクロネッカーのデルタ：$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$ を使って、

$$a_n=p\cdot\delta_{1n}+q\cdot 2^{n-2}(1-\delta_{1n})$$

とするとカッコイイかも知れない。

ということで、間違い探し問題を終える。

1.4 名は体を表す

上記間違い探し問題に、『隣接 3 項間の漸化式』と書いてあれば、間違いは無いことになる。

名は体を表す：隣接 3 項間、と断れば、$s\neq 0$ であることや、2 次方程式の解には 0 が無いことが暗黙の了解事項になる。“隣接 3 項間”という名前があることの影響の大きさを実感した次第。

今回のレポートの本題は以上。実際に私が危機に遭遇したときの様子を附記として、以下に紹介しておく。

2 附記：遭遇した危機

2.1 数実研第 115 回のレポート

数実研第 115 回での私の発表レポート“問題解決のサプリメント：工夫 or 元気”は、実は発表前日にレポートに記載の問題の文を急遽書き換えたのだった。書き換える前のレポートと書き換えた後のレポートにある書き換えた問題文については、発表レポートの中にも記載し、書き換えなければ解答が非常に煩雑になる（本日述べた場合分けが必要になる）という説明を書いておいた。しかし、今回の危機遭遇については記載しなかった。

そこで、“危機管理”という視点で今回のレポートを作成した。以下に、前回レポート発表前日の危機遭遇の様子を紹介する。前回発表レポートにおいて書き換えたのは次の問題であり、書き換えた所は赤く示した部分である。

書き換え前に書いていた元の問題

θ は定数で、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。漸化式

$$a_{n+2} - 2(\sin\theta)a_{n+1} - (\cos^2\theta)a_n = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) x の 2 次方程式 $x^2 - 2(\sin\theta)x - \cos^2\theta = 0$ の解を求めよ。

(2) $p\,, q$ を実数の定数とし、$a_1 = p\,,\ a_2 = q$ として、② の一般項 a_n を $p\,, q\,, n$ の式で表せ。

(3) 次の式を満たす ② の一般項 a_n を求めよ。

$$a_1 = 2\ ,\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

次のように書き換えた。

書き換え後の問題

θ は定数で、$0 < \theta < 2\pi$ $\left(\theta \neq \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ とする。漸化式

$$a_{n+2} - 2(\sin\theta)a_{n+1} - (\cos^2\theta)a_n = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

について以下の問いに答えよ。

(1) x の 2 次方程式 $x^2 - 2(\sin\theta)x - \cos^2\theta = 0$ の解を求めよ。

(2) $p\,, q$ を実数の定数とし、$a_1 = p\,,\ a_2 = q$ として、② の一般項 a_n を $p\,, q\,, n$ の式で表せ。

(3) 次の式を満たす ② の一般項 a_n を求めよ。

$$a_1 = 2\ ,\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

2.2 冷や汗の瞬間

元の問題の (2) の解答は概略次のようなことを記載していた。

(1) の 2 つの解を α, β とおくと、

$$a_n = \frac{(q - \beta p)\,\alpha^{n-1} - (q - \alpha\,p)\,\beta^{n-1}}{\alpha - \beta}$$

ここで、$\alpha = \sin\theta + 1\,,\ \beta = \sin\theta - 1$ として

$$\text{（答）}\ a_n = \frac{1}{2}\left\{(p + q - p\sin\theta)(\sin\theta + 1)^{n-1} - (q - p - p\sin\theta)(\sin\theta - 1)^{n-1}\right\}$$

これでなんの支障も感じてはいなかった。

研究会前日、どのように話せばよいか、リハーサルも兼ねて考えていた。そのとき、$\sin\theta - 1$ が 0 になったときのことがふと頭に浮かんだ。それまでは、『$\sin\theta = 1$ のときなので、(答) の式に $\sin\theta = 1$ を代入して $a_n = \dfrac{1}{2}q \cdot 2^{n-1}$ となり、等比数列であり、②も今の場合公比 2 の等比数列を示すので問題なし』のようなことを頭に思い浮かべただけであった（何の支障もない、という感覚であったことの自己分析）。

ところが、$\sin\theta = 1$ を (答) の式に代入した式を実際に書いてみて愕然とした。

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{q \cdot 2^{n-1} - (q-2p) \cdot 0^{n-1}\right\}$$

a_1 は？ a_1 を計算しようとすると、0^0 が現れてくる。元の漸化式②は

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = 0 \\ a_1 = p, a_2 = q \end{cases}$$

なので、$a_1 = p$ となるように 0^0 の値を $0^0 = 1$ と定義すればすむことだが、高校数学として許される？　確かに、$a \neq 0$ のとき $a^0 = 1$ であることを拠り所とすれば、$0^0 = 1$ としたい。しかし、$0^a = 0$ を拠り所とすれば、$0^0 = 0$ としたいはず、となってしまう。

0^0 をどう決めれば良いか、決定打が無いからか、0^0 は高校数学では考えないことになっていると思う（自信はない）。

いずれにせよ、高校での問題として考える場合、“隣接 3 項間”と書いてあるかどうかで大きく影響を受けることになる。